

Volledigheid en Onvolledigheid

Yde Venema

Institute for Logic, Language and Computation

Universiteit van Amsterdam

<https://staff.fnwi.uva.nl/y.venema>

28 maart 2019

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

■ testen:

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

■ testen: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, ...

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

- testen: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, ...
- bekend: gecheckt voor alle even getallen $< 400.000.000.000.000.000$

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

- testen: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, ...
- bekend: gecheckt voor alle even getallen $< 400.000.000.000.000.000$

Kan een computer Goldbach's vermoeden niet bewijzen?

Goldbach's Vermoeden

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

- testen: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, ...
- bekend: gecheckt voor alle even getallen $< 400.000.000.000.000.000$

Kan een computer Goldbach's vermoeden niet bewijzen?

Kan een computer 'het werk doen' voor elke rekenkundige stelling?

Rekenkundige Stellingen

Rekenkunde: optelling en vermenigvuldiging van de natuurlijke getallen

Rekenkundige Stelling (RS): een ware bewering over de rekenkunde

Ware rekenkunde: de verzameling van alle rekenkundige stellingen.

Rekenkundige Stellingen

Rekenkunde: optelling en vermenigvuldiging van de natuurlijke getallen

Rekenkundige Stelling (RS): een ware bewering over de rekenkunde

Ware rekenkunde: de verzameling van alle rekenkundige stellingen.

- Is de ware rekenkunde **beslisbaar**?

Dwz: kan een algoritme checken of een bewering een RS of niet?

Rekenkundige Stellingen

Rekenkunde: optelling en vermenigvuldiging van de natuurlijke getallen

Rekenkundige Stelling (RS): een ware bewering over de rekenkunde

Ware rekenkunde: de verzameling van alle rekenkundige stellingen.

- Is de ware rekenkunde **beslisbaar**?

Dwz: kan een algoritme checken of een bewering een RS of niet?

- Is de ware rekenkunde **axiomatiseerbaar**?

Dwz: is er een formeel axiomatisch systeem voor de RS?

Rekenkundige Stellingen

Rekenkunde: optelling en vermenigvuldiging van de natuurlijke getallen

Rekenkundige Stelling (RS): een ware bewering over de rekenkunde

Ware rekenkunde: de verzameling van alle rekenkundige stellingen.

- Is de ware rekenkunde **beslisbaar**?

Dwz: kan een algoritme checken of een bewering een RS of niet?

- Is de ware rekenkunde **axiomatiseerbaar**?

Dwz: is er een formeel axiomatisch systeem voor de RS?

Wat is een formeel systeem?

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ MI

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII$

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIII$

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIII \xrightarrow{1} MIIIU$

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIII \xrightarrow{1} MIIIU \xrightarrow{3} MIUU$

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIII \xrightarrow{1} MIIIU \xrightarrow{3} MIUU \xrightarrow{4} MI \rightarrow \dots$

Formeel Systeem: MU

Alfabet: M,I,U

Een **streng** is een woord over dit alfabet, bijv. MIUIU, UMUUU, III

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Voorbeeld

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIII \xrightarrow{1} MIIIU \xrightarrow{3} MIUU \xrightarrow{4} MI \rightarrow \dots$

Deze puzzel werd geïntroduceerd door D. Hofstadter in zijn boek *Gödel, Escher, Bach*.

Van MI naar MU?

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Van MI naar MU?

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag

■ $MI \rightarrow \dots \rightarrow MU?$

Van MI naar MU?

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag

■ $MI \rightarrow \dots \rightarrow MU?$

Testen

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIIII \xrightarrow{1} MIIIIU \xrightarrow{3} MIUU \xrightarrow{4} MI \rightarrow \dots$

Van MI naar MU?

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag

■ $MI \rightarrow \dots \rightarrow MU$?

Testen

■ $MI \xrightarrow{2} MII \xrightarrow{2} MIIII \xrightarrow{1} MIIIIU \xrightarrow{3} MIUU \xrightarrow{4} MI \rightarrow \dots$

■ $MI \xrightarrow{1} MIU \xrightarrow{2} MIUIU \xrightarrow{2} MIUIUIUIU \xrightarrow{2} MIUIUIUIUIUIUIUIUIU \rightarrow \dots$

Van MI naar MU?

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag

■ MI $\rightarrow \dots \rightarrow$ MU?

Testen

- MI $\xrightarrow{2}$ MII $\xrightarrow{2}$ MIIII $\xrightarrow{1}$ MIIIIU $\xrightarrow{3}$ MIUU $\xrightarrow{4}$ MI $\rightarrow \dots$
- MI $\xrightarrow{1}$ MIU $\xrightarrow{2}$ MIUIU $\xrightarrow{2}$ MIUIUIUIU $\xrightarrow{2}$ MIUIUIUIUIUIUIUIUIU $\rightarrow \dots$
- MI $\xrightarrow{2}$ MII $\xrightarrow{2}$ MIIII $\xrightarrow{2}$ MIIIIIII $\xrightarrow{3}$ MUIIII $\xrightarrow{3}$ MUUII $\xrightarrow{4}$ MII $\rightarrow \dots$
- MI $\xrightarrow{2}$ MII $\xrightarrow{2}$ MIIII $\xrightarrow{3}$ MIU $\rightarrow \dots$

M-modus vs I-modus

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag Is MU afleidbaar?

M-modus vs I-modus

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag Is MU afleidbaar?

Idee Tel het aantal I-tjes!

M-modus vs I-modus

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag Is MU afleidbaar?

Idee Tel het aantal I-tjes!

Stelling Als σ afleidbaar is dan is $\#_{\sigma}(I)$ geen drievoud.

M-modus vs I-modus

Axioma

■ MI

Afleidingsregels:

- 1 voeg een U toe als de streng eindigt op I
- 2 verdubbel de streng na de eerste M
- 3 vervang III door U
- 4 verwijder UU

Vraag Is MU afleidbaar?

Idee Tel het aantal I-tjes!

Stelling Als σ afleidbaar is dan is $\#_{\sigma}(I)$ geen drievoud.

Gevolg MU is niet afleidbaar.

Propositie logica

Waarheidswaarde

Waarheidstabel

Logische connectieven

Logische implicatie

Logische equivalentie

Logische negatie

Logische conjunctie

Logische disjunctie

Logische exclusieve disjunctie

Logische implicatie

Logische equivalentie

Propositielogica

Alfabet:

- ▶ $p, q, r, \dots$ (propositievariabelen)
- ▶ $\neg$ (negatie), $\rightarrow$ (implicatie)
- ▶ haakjes: $(,)$

Propositie logica

Alfabet:

- ▶ $p, q, r, \dots$ (propositievariabelen)
- ▶ $\neg$ (negatie), $\rightarrow$ (implicatie)
- ▶ haakjes: $(,)$

Formules: $p, p \rightarrow q, \neg q, (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p, \dots$

Propositielogica

Alfabet:

- ▶ $p, q, r, \dots$ (propositievariabelen)
- ▶ $\neg$ (negatie), $\rightarrow$ (implicatie)
- ▶ haakjes: $(,)$

Formules: $p, p \rightarrow q, \neg q, (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p, \dots$

Meer is niet nodig:

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Propositielogica

Alfabet:

- ▶ $p, q, r, \dots$ (propositievariabelen)
- ▶ $\neg$ (negatie), $\rightarrow$ (implicatie)
- ▶ haakjes: $(,)$

Formules: $p, p \rightarrow q, \neg q, (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p, \dots$

Meer is niet nodig:

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Een formule is **geldig** als deze onder elke interpretatie waar is (waarheidstafels)

Axiomatisch Systeem voor de Propositielogica

Axioma's

- $p \rightarrow p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Axiomatisch Systeem voor de Propositielogica

Axioma's

- $p \rightarrow p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Afleidingsregels:

- Modus Ponens: concludeer uit α and $\alpha \rightarrow \beta$ dat β
- Substitutie: concludeer uit $\varphi(p)$ dat $\varphi(\psi)$

Propositie logica: Volledigheid

Stelling Voor elke propositionele formule α geldt:

$$\alpha \text{ is geldig} \iff \alpha \text{ is afleidbaar.}$$

Propositielogica: Volledigheid

Stelling Voor elke propositionele formule α geldt:

$$\alpha \text{ is geldig} \iff \alpha \text{ is afleidbaar.}$$

De geldige formules van de **propositielogica** zijn dus **axiomatiseerbaar**.

Rekenkunde als formeel systeem

Idee

- Codeer rekenkundige beweringen als logische formules
- Ontwerp een geschikt axiomatisch systeem

Rekenkunde als formeel systeem

Idee

- Codeer rekenkundige beweringen als logische formules
- Ontwerp een geschikt axiomatisch systeem

Doel:

- Voor elke rekenkundige formule α geldt:

α is een rekenkundige stelling $\overset{?}{\iff} \alpha$ is afleidbaar.

Alfabet

Predicatenlogica:

$v_0, v_1, \dots$ (variabelen)

$=$ (identiteit)

$\neg$ (negatie), $\wedge$ (conjunctie), $\vee$ (disjunctie) $\rightarrow$ (implicatie)

$\forall$ (universele quantor), $\exists$ (existentiële quantor)

Rekenkunde:

0 (nul)

$+$ (optelling)

$*$ (vermenigvuldiging)

Alfabet

Predicatenlogica:

$v_0, v_1, \dots$ (variabelen)

$=$ (identiteit)

$\neg$ (negatie), $\wedge$ (conjunctie), $\vee$ (disjunctie) $\rightarrow$ (implicatie)

$\forall$ (universele quantor), $\exists$ (existentiële quantor)

Rekenkunde:

0 (nul)

$+$ (optelling)

$*$ (vermenigvuldiging)

S (opvolger)

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right.$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2) \right)$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = SS0)) \right.$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{array}{l} \exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ \wedge \text{ priem}(y_1) \\ \wedge \text{ priem}(y_2)) \end{array} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = 550) \wedge \exists u (x = u + u)) \rightarrow \right.$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = 550) \wedge \exists u (x = u + u)) \rightarrow \right. \\ \left. \exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2) \right)$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = 50) \wedge \exists u (x = u + u)) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \neg(y_1 = 0) \wedge \neg(y_1 = 50)) \end{aligned} \right)$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = S0) \wedge \exists u (x = u + u)) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \neg(y_1 = 0) \wedge \neg(y_1 = S0) \wedge \forall z_1 \forall z_2 (y_1 = z_1 * z_2 \rightarrow (z_1 = y_1 \vee z_2 = y_1))) \end{aligned} \right)$$

Goldbach's Vermoeden Geformaliseerd

Elk even getal (groter dan twee) is de som van twee priemgetallen

$$\forall x \left((x \text{ groter dan twee} \wedge x \text{ is even}) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 (x = y_1 + y_2 \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_1) \\ &\quad \wedge \text{priem}(y_2)) \end{aligned} \right)$$

$$\forall x \left((\neg(x = 0) \wedge \neg(x = S0) \wedge \exists u (x = u + u)) \rightarrow \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists y_1 \exists y_2 \left(x = y_1 + y_2 \right. \\ &\quad \wedge \neg(y_1 = 0) \wedge \neg(y_1 = S0) \wedge \forall z_1 \forall z_2 (y_1 = z_1 * z_2 \rightarrow (z_1 = y_1 \vee z_2 = y_1)) \\ &\quad \left. \wedge \neg(y_2 = 0) \wedge \neg(y_2 = S0) \wedge \forall z_1 \forall z_2 (y_2 = z_1 * z_2 \rightarrow (z_1 = y_2 \vee z_2 = y_2)) \right) \end{aligned} \right)$$

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
- ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
- ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
- ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
- ▶ $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
- ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
- ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
- ▶ $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$
- ▶ $\forall x (x * 0 = 0)$
- ▶ $\forall x \forall y (x * Sy = (x * y) + x),$

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
- ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
- ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
- ▶ $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$
- ▶ $\forall x (x * 0 = 0)$
- ▶ $\forall x \forall y (x * Sy = (x * y) + x),$
- ▶ $\left(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \right) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
 - ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
 - ▶ $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$
 - ▶ $\forall x (x * 0 = 0)$
 - ▶ $\forall x \forall y (x * Sy = (x * y) + x),$
 - ▶ $\left(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \right) \rightarrow \forall x \varphi(x)$
- + standaard axioma's voor de predicatenlogica

Axiomatisch Systeem: Peano rekenkunde (PA)

Axioma's

- ▶ $\forall x (0 \neq Sx)$
 - ▶ $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
 - ▶ $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$
 - ▶ $\forall x (x * 0 = 0)$
 - ▶ $\forall x \forall y (x * Sy = (x * y) + x),$
 - ▶ $\left(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \right) \rightarrow \forall x \varphi(x)$
- + standaard axioma's voor de predicaatenlogica

Regels

- ▶ Modus Ponens: concludeer uit α and $\alpha \rightarrow \beta$ dat β

Doel:

■ Voor elke rekenkundige formule α geldt:

α is een rekenkundige stelling $\overset{?}{\iff} \alpha$ is afleidbaar in PA.

Gödel's Onvolledigheid

Doel:

- Voor elke rekenkundige formule α geldt:

α is een rekenkundige stelling $\overset{?}{\iff} \alpha$ is afleidbaar in PA.

Stelling (Gödel)

Er is een rekenkundige stelling die niet afleidbaar is in PA.

Inspiratie

Inspiratie

Leugenaarsparadox

ik ben niet waar

Inspiratie

Leugenaarsparadox

ik ben niet waar

Afleidbaarheids‘paradox’

ik ben niet afleidbaar in PA

Gödel's Codering

De rekenkunde is expressief genoeg om

- rekenkundige beweringen te coderen als getallen:
elke formule φ krijgt een Gödel code $\overline{\varphi} \in \mathbb{N}$
- afleidingen te coderen als getallen:
elke afleiding D krijgt een Gödel code $\overline{D} \in \mathbb{N}$
- een **afleidbaarheidspredicaat** te coderen:
 $\Box\varphi \sim$

Gödel's Codering

De rekenkunde is expressief genoeg om

- rekenkundige beweringen te coderen als getallen:
elke formule φ krijgt een Gödel code $\overline{\varphi} \in \mathbb{N}$
- afleidingen te coderen als getallen:
elke afleiding D krijgt een Gödel code $\overline{D} \in \mathbb{N}$
- een **afleidbaarheidspredicaat** te coderen:
 $\Box\varphi \sim$ “ $\exists x(x$ codeert een PA-afleiding voor $\varphi)$ ”
 $\sim$

Gödel's Codering

De rekenkunde is expressief genoeg om

- rekenkundige beweringen te coderen als getallen:
elke formule φ krijgt een Gödel code $\overline{\varphi} \in \mathbb{N}$
- afleidingen te coderen als getallen:
elke afleiding D krijgt een Gödel code $\overline{D} \in \mathbb{N}$
- een **afleidbaarheidspredicaat** te coderen:
 $\Box\varphi \sim$ “ $\exists x(x$ codeert een PA-afleiding voor $\varphi)$ ”
 $\sim$ “ φ is afleidbaar in PA”

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box\varphi$ is waar ($\Box\varphi \in \text{RS}$)

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box\varphi$ is waar ($\Box\varphi \in \text{RS}$)

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar ($\varphi \in \text{RS}$)

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box\varphi$ is waar ($\Box\varphi \in \text{RS}$)

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar ($\varphi \in \text{RS}$)

Dekpuntlemma Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg\Box\gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box\varphi$ is waar ($\Box\varphi \in \text{RS}$)

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar ($\varphi \in \text{RS}$)

Dekpuntlemma Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg\Box\gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA
Bewijs

■ Stel γ is afleidbaar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA
Bewijs

■ Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Bewijs

- Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar. Dus
 - 1) Wegens Dekpuntstelling: γ is onwaar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Bewijs

- Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar. Dus
 - 1) Wegens Dekpuntstelling: γ is onwaar.
 - 2) Wegens Correctheid PA: γ is waar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Bewijs

- Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar. Dus
 - 1) Wegens Dekpuntstelling: γ is onwaar.
 - 2) Wegens Correctheid PA: γ is waar.Tegenspraak

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA

Bewijs

- Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar. Dus
 - 1) Wegens Dekpuntstelling: γ is onwaar.
 - 2) Wegens Correctheid PA: γ is waar.Tegenspraak
- Dus γ is niet afleidbaar: $\Box \gamma$ is onwaar.

Gödel's Bewijs

Afleidbaarheidspredicaat φ is afleidbaar $\iff \Box \varphi$ is waar

Correctheid PA Als φ afleidbaar is dan is φ waar

Dekpuntstelling Er is een rekenkundige bewering γ zó dat $\gamma \equiv \neg \Box \gamma$.

γ : ik ben niet afleidbaar.

Stelling γ is een rekenkundige stelling, maar niet afleidbaar in PA
Bewijs

- Stel γ is afleidbaar. Dan: $\Box \gamma$ is waar. Dus
 - 1) Wegens Dekpuntstelling: γ is onwaar.
 - 2) Wegens Correctheid PA: γ is waar.Tegenspraak
- Dus γ is niet afleidbaar: $\Box \gamma$ is onwaar.
Wegens Dekpuntstelling: γ is waar, dwz $RS(\gamma)$.

Repareren?

Repareren?

- Er zijn ook 'gewone' rekenkundige stellingen niet afleidbaar in PA

Repareren?

- Er zijn ook 'gewone' rekenkundige stellingen niet afleidbaar in PA
- Gödel's Stelling geldt ook voor 'nette' uitbreidingen van PA

Tot slot

Wat is de betekenis van Gödel's stelling?