Lang leve de Logica!
Masterclass Docenten Wiskunde C

Benno van den Berg
Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam

30 oktober 2019

Redeneringen: geldig of niet

Correct redeneren

Redenering

Premisse 1.
Premisse 2.
Dus: Conclusie.

Wanneer is deze redenering correct (of geldig)?

- Als de premissen waar zijn, dan moet de conclusie ook waar zijn.
- Oftewel: Het is onmogelijk dat de premissen waar zijn, maar de conclusie niet.

Dat wil niet zeggen dat de premissen waar zijn of dat de conclusie waar is!

We sluiten alleen uit dat tegelijkertijd de premissen waar en de conclusie onwaar zouden kunnen zijn.

Geldig of niet?

Geldig of niet?

Emma drinkt koffie of thee.
Emma drinkt geen thee.
Dus: Emma drinkt koffie.

Geldig of niet?

Het is donderdag of vrijdag.
Het is geen vrijdag.
Dus: Het is donderdag.

Geldig of niet?

Goofy is een hond of een kat.
Goofy is geen kat.
Dus: Goofy is een hond.

Geldig of niet?

Geldig of niet?

Henk verkoopt zijn aandelen Philips als ze verder dalen.
Henk verkoopt zijn aandelen Philips.
Dus: De aandelen Philips zijn gedaald.

Geldig of niet?

Als het sinterklaas is, dan liggen de winkels vol met snoepgoed.
De winkels liggen vol met snoepgoed.
Dus: Het is sinterklaas.

Geldig of niet?

Als Mark Rutte premier is, zit de VVD in de regering.
De VVD zit in de regering.
Dus: Mark Rutte is premier.

Correct redeneren

Elke redenering van de volgende vorm is geldig!

Redenering

A of B.
Niet B.
Dus: A.

Elke redenering van de volgende vorm is ongeldig!

Redenering

Als A dan B.
B.
Dus: A.

Aristoteles: of een redenering geldig is, hangt alleen af van de *vorm*.

Conclusie

- Om te zien of een redenering geldig is hoef je niet te weten of de premissen waar zijn of de conclusie waar is.
- Feitenkennis is niet belangrijk voor logica.
- Aristoteles: of een redenering geldig is, hangt alleen af van de *vorm*.
- De vorm wordt bepaald door speciale woorden: en, of, niet, als . . . dan.
- De logische structuur is soms niet onmiddelijk duidelijk.

Herken de vorm!

Symbolen

en	conjunctie	$\varphi \wedge \psi$
niet	negatie	$\neg\varphi$
of	disjunctie	$\varphi \vee \psi$
als ... dan	implicatie	$\varphi \to \psi$
desda	bi-implicatie, equivalentie	$\varphi \leftrightarrow \psi$

Geldige redenering

Geldige redenering

Emma drinkt koffie of thee.
Emma drinkt geen thee.
Dus: Emma drinkt koffie.

Vorm

$p \vee q$.
$\neg q$.
Dus: p.

Vertaalsleutel:

p	Emma drinkt koffie.
q	Emma drinkt thee.

Ongeldige redenering

Ongeldige redenering

Henk verkoopt zijn aandelen Philips als ze verder dalen.
Henk verkoopt zijn aandelen Philips.
Dus: De aandelen Philips zijn gedaald.

Vorm

$p \to q$.
q.
Dus: p.

Vertaalsleutel:

p	De aandelen Philips dalen verder.
q	Henk verkoopt zijn aandelen Philips.

Meer vertaalsommen

1. *Alleen als de midvoor op dreef is kunnen we van Feyenoord winnen.*
2. *Om RBC te kunnen verslaan is het voldoende dat de midvoor op dreef is.*
3. *Om van Feyenoord te kunnen winnen is het nodig dat de midvoor op dreef is.*
4. *Je mag de dieren niet voederen of aaien.*
5. *Doe de mensen beloften, en ze stemmen op je.*
6. *Mark gaat naar school tenzij hij naar de dokter moet.*
7. *Een driehoek is gelijkbenig mits hij twee gelijke hoeken heeft.*
8. *Je mag de disco in mits je een kaartje koopt.*

Rekenen met formules

Waarheidswaardes en waarheidsfunctionele connectieven

In de logica en wiskunde gaan we ervan uit dat elke uitspraak een *waarheidswaarde* heeft. Dit is een sjieke manier om te zeggen: we gaan ervan uit dat iedere uitspraak *waar* of *onwaar* is.

In plaats van "onwaar" schrijven we vaak 0, in plaats van "waar" 1. (De waardes 0 en 1 worden ook wel de *booleans* genoemd.)

In de logica is het gebruik van de woorden "en", "of" en dergelijke *waarheidsfunctioneel*.

Dat wil zeggen: de waarheidswaarde van "p en q" hangt alleen af van de waarheidswaardes van p en q.

Conjunctie

Waarheidstafel

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Negatie

Waarheidstafel

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Disjunctie

Waarheidstafel

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

In de logica (en wiskunde in het algemeen) wordt “of” inclusief gebruikt: $\varphi \vee \psi$ is waar als φ en ψ beiden waar zijn.

- Wil je patat of pannenkoeken eten op je verjaardag?
- Allebei!

Implicatie

Waarheidstafel

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Het is nogal discutabel of dit overkomt met de “als . . . dan” in het alledaagse leven.

- Als de bouw protesteert, dan staat het Malieveld vol.
- Als de bouw protesteert, dan valt het kabinet.
- Als de bouw protesteert, dan schijnt de zon.
- Als de bouw protesteert, dan is de maan van kaas gemaakt.
- Als de maan van kaas gemaakt is, dan is Rutte premier.
- Als Den Haag de hoofdstad van Nederland is, dan ligt de Dam in Den Haag.

Equivalentie

Waarheidstafel

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Complexe formules

Met behulp van de connectieven $\wedge, \vee, \rightarrow, \ldots$ en propositieletters $p, q, r, s \ldots$ kunnen we ingewikkeldere formules maken.

Bijvoorbeeld: $(p \wedge (q \vee \neg s)), (p \vee \neg s), ((s \vee p) \rightarrow q)$, et cetera.

Vergelijk: met x, y, z en $+, \cdot, -$ kunnen we ingewikkeldere formules maken. Zoals: $x \cdot y + z \cdot -x$, of $x \cdot (y + z) - x$.

Als je geen haakjes zet, kunnen formules dubbelzinnig worden (net als in de algebra). Zo zou

$$p \vee q \rightarrow r$$

zowel $p \vee (q \rightarrow r)$ als $(p \vee q) \rightarrow r$ kunnen betekenen. Daarom is het, in het algemeen, belangrijk haakjes te zetten!

Ingewikkeldere formules uitrekenen

Als je een ingewikkeldere formule hebt zoals

$$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \neg p)$$

en je weet de waarheidswaarden van p, q, r (bv. p waar, q onwaar en r waar), dan kun je de waarheidwaarde van de hele formule uitrekenen.

Vergelijk: als je weet x, y, z zijn (bv. $x = 5$, $y = 6, z = 2$), dan kun je

$$(x + y) - (x \cdot z)$$

uitrekenen.

Interpretatie en waardering

Een functie die waarheidswaardes toekent aan propositieletters heet een *interpretatie*. Dus als P een verzameling propositieletters is, is een interpretatie een functie $I\colon P \to \{0, 1\}$. We denken hieraan als een "mogelijke wereld" of een "scenario".

Als je een interpretatie I gekozen hebt, dan krijgt iedere formule φ een waarheidswaarde 0 of 1. We noteren deze waarheidswaarde met $V_I(\varphi)$. We noemen dit de *waardering* of *valuatie* van φ onder I.

Voorbeelden

Voorbeeld

Stel $P = \{p, q, r\}$, $I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1$. Wat is $V_I(p \wedge (q \vee \neg r))$?

Voorbeeld

Stel $P = \{p, q, r\}$, $I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1$. Wat is $V_I((p \to q) \vee r)$?

Voorbeeld

Stel $P = \{p, q, r\}$, $I(p) = 0, I(q) = 1, I(r) = 1$. Wat is $V_I((p \leftrightarrow q) \to \neg r)$?

Waarheidstafel

Voor een formule φ met propositieletters P kunnen we alle waarderingen schematisch weergeven in een *waarheidstafel*.

Dit is een waarheidstafel voor $p \wedge (q \vee \neg r)$ met letters p, q, r.

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge (q \vee \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Alle mogelijke interpretaties $\{p, q, r\} \to \{0, 1\}$ staan links en in de andere kolommen staan de valuaties van de relevante deelformules.

Waarheidstafel

Voor een formule φ met propositieletters $\{p, q, r\}$ kunnen we alle waarderingen schematisch weergeven in een *waarheidstafel*.

Bijvoorbeeld:

p	q	r	$\neg r$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Alle mogelijke interpretaties $\{p, q, r\} \rightarrow \{0, 1\}$ staan links en in de andere kolommen staan de valuaties van de relevante deelformules.

Geldigheid: een kwestie van rekenen

Tautologie, contradictie, contingente formule

Definitie

Stel φ is een formule met propositieletters in P. Dan heet φ

- een *tautologie* of *logisch waar* als $V_I(\varphi) = 1$ voor alle interpretaties $I \colon P \to \{0, 1\}$.
- een *contradictie* of *logisch onwaar* als $V_I(\varphi) = 0$ voor alle interpretaties $I \colon P \to \{0, 1\}$.
- *contingent* als het geen tautologie en geen contradictie is.

Opgave: Tot welke klasse behoren de volgende formules?

$$p \vee \neg p, \quad (p \vee r) \to p, \quad p \to \neg p, \quad (p \wedge q) \to \neg p, \quad ((p \vee q) \wedge \neg q) \to p.$$

Logisch gevolg, logisch equivalent

Schematisch kunnen we een redenering als volgt weergeven:

Premissen: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$
Conclusie: ψ

Zo'n redenering is *geldig* als er *geen* interpretatie I bestaat met $V_I(\varphi_i) = 1$ voor alle i en $V_I(\psi) = 0$. Anders geformuleerd: als voor iedere interpretatie I met $V_I(\varphi_i) = 1$ ook geldt $V_I(\psi) = 1$. We schrijven dan:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

en zeggen ook dat ψ een *logisch gevolg* is van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Logisch equivalent

We noemen twee formules φ en ψ *logisch equivalent* zodra $\varphi \models \psi$ en $\psi \models \varphi$. Dat wil zeggen: $V_I(\varphi) = V_I(\psi)$ voor elke interpretatie I.

Geldig?

Geldig?

Emma drinkt koffie of thee.
Emma drinkt geen thee.
Dus: Emma drinkt koffie.

De vraag is: $p \vee q, \neg q \models p$.
(Met: p voor Emma drinkt koffie, q voor Emma drinkt thee.)

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

Dus: Geldig! Want: in elke rij waarin $p \vee q$ en $\neg q$ een 1 krijgen, heeft p ook een 1.

Geldig?

Ongeldige redenering

Henk verkoopt zijn aandelen Philips als ze verder dalen.
Henk verkoopt zijn aandelen Philips.
Dus: De aandelen Philips zijn gedaald.

De vraag is: $p \to q, q \models p$.
(Met: p voor de aandelen Philips dalen verder en q voor Henk verkoopt zijn aandelen Philips.)

p	q	$p \to q$	q	p
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Dus: Ongeldig! Want: er is een rij waarin $p \to q$ en q een 1 krijgen, maar p niet.

Geldig?

Geldig?

Als er toetje is, dan is er vla of yoghurt.
Er is geen yoghurt.
Dus: Er is geen toetje.

De vraag is: $p \to (q \vee r), \neg r \models \neg p$.
(Met: p voor toetje, q voor vla en r voor yoghurt.)

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$\neg r$	$\neg p$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Dus: ...

Meer voorbeelden

Uit examen Wiskunde C 2018, tweede tijdvak

Bij sommige pabos krijgen studenten aan het begin van hun eerste jaar een rekentoets. Bij een onvoldoende worden ze in de loop van het eerste jaar bijgespijkerd en krijgen ze voor de zomer een nieuwe rekentoets. Als ze hier niet voor slagen, mogen ze niet door naar het tweede jaar. We introduceren weer afkortingen:

R: slagen voor rekentoets
O: overgaan naar tweede jaar

Onderzoek of $R \to O$ volgt uit de tekst hierboven.

Geldige redenering?

- *Ankie slaagt alleen als Brigit slaagt.*
- *Als Brigit slaagt, dan slaagt Carolien.*
- *Carolien slaagt, tenzij Brigit en Ankie slagen.*
- Dus: *Ankie zakt.*

Is dit een geldige redenering? En wat weten we op basis van de premissen over Brigit?

Wie komt er?

Gegeven is:

- *Jan komt als Marie of Anne komt.*
- *Anne komt als Marie niet komt.*
- *Als Anne komt, dan komt Jan.*

We hebben de vragen als: Hoeveel personen komen er? Wie komt er zeker? Wie komt er zeker niet? En van wie is het niet zeker?

Prinses en de tijger

Een gevangene kan kiezen tussen twee deuren. Achter elke deur is een kamer met een prinses of een tijger. Er kan achter beide deuren een tijger of een prinses zitten. Opent hij een deur met een tijger er achter dan wordt hij verslonden. Zit er een prinses achter, dan wordt hij vrij gelaten en mag met haar trouwen.

Op de deur hangt een bordje met een mededeling die waar of onwaar kan zijn. Het bordje op deur 1 luidt: *In deze kamer zit een prinses en in de andere kamer een tijger*. Het bordje op deur 2 luidt: *In één van de kamers zit een prinses en in de andere een tijger*.

Gevangene krijg te horen dat één van de zinnen onwaar is, en de andere waar. Welke deur moet hij kiezen als hij met een prinses wil trouwen en niet door een tijger wil worden opgegeten?

Ausblick

Wat is er nog meer?

- Kennislogica: zie volgende week
- Natuurlijke deductie (bewijssystemen)
- Predicatenlogica
- SAT-solvers, Prolog, resolutie, ...

Goede bronnen

- Logica voor Informatica. Zie: http://resources.illc.uva.nl/lvi/
- Logic and Structure (Dirk van Dalen). Zie: https://www.springer.com/gp/book/9781447145578
- Logica voor alfa's en informatici (Jan van Eijck & Elias Thijsse) https://homepages.cwi.nl/ jve/books/pdfs/lai.pdf
- GAMUT. Zie: https://www.press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/L/bo3618810.html
- Logic in Action. Zie: http://logicinaction.org/
- Puzzelboekjes van Raymond Smullyan.
- We zullen tezijnertijd alle literatuurverwijzingen op deze website verzamelen:

  https://logicaindeklas.nl/

  Deze website is voor het eind van het jaar live.