

Programma

Wat is logica?

- Voorbeelden van redeneringen – Vorm van de redenering

Propositie logica

- Inleiding

Syntaxis van propositie logica

- Vocabulaire – Formules – Vertalingen

Semantiek van propositie logica

- Semantiek – Waarheid – Compositionaliteit – Waarheidstafels – Valuatiefunctie

Eigenschappen van formules

- Tautologie, contradictie en contingentie – Logische equivalentie

Geldigheid

- Semantische geldigheid – Puzzles

Natuurlijke deductie

- Inleiding – Volledigheid

Afronding

Programma

Wat is logica?

- Voorbeelden van redeneringen – Vorm van de redenering

Propositie logica

- Inleiding

Syntaxis van propositie logica

- Vocabulaire – Formules – Vertalingen

Semantiek van propositie logica

- Semantiek – Waarheid – Compositionaliteit – Waarheidstafels – Valuatiefunctie

Eigenschappen van formules

- Tautologie, contradictie en contingentie – Logische equivalentie

Geldigheid

- Semantische geldigheid – Puzzles

Natuurlijke deductie

- Inleiding – Volledigheid

Afronding

Redeneringen	Propositielogica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	○○○○ ○○○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica

Redeneringen	Propositie logica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
oooooo ooooo	oo	ooooo oooooo ooo	o ooo oo ooooooo oooo	ooo oooo	ooooooooo ooo	oooo ooo	

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositie logica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal

Redeneringen	Propositie logica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
oooooo ooooo	oo	ooooo oooooo ooo	o ooo oo ooooooo ooooo	ooo oooo	ooooooooo ooo	oooo ooo	

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositie logica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositie logica

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica
- Onderzoeken van geldigheid van redeneringen met behulp van twee noties van geldigheid:

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica
- Onderzoeken van geldigheid van redeneringen met behulp van twee noties van geldigheid:
 1. Semantische notie van geldigheid (waarheidstafels)
 2. Syntactische notie van geldigheid (natuurlijke deductie)

Leerdoelen

- Bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica
- Onderzoeken van geldigheid van redeneringen met behulp van twee noties van geldigheid:
 1. Semantische notie van geldigheid (waarheidstafels)
 2. Syntactische notie van geldigheid (natuurlijke deductie)
- Bekendheid krijgen van de relatie tussen beide noties van geldigheid (correctheid, volledigheid)

●○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Redeneringen

Redeneringen

Redeneren doen we de hele dag door en heeft vele toepassingen. Het is belangrijk om te weten wanneer een redenering *geldig* is. Logica bestudeert de principes van *geldig redeneren*.

Definitie

Een redenering is een (eindig) rijtje zinnen: een aantal premissen gevolgd door een conclusie.

Redeneringen

Redeneren doen we de hele dag door en heeft vele toepassingen. Het is belangrijk om te weten wanneer een redenering *geldig* is. Logica bestudeert de principes van *geldig redeneren*.

Definitie

Een redenering is een (eindig) rijtje zinnen: een aantal premissen gevolgd door een conclusie.

Schematisch:

Premisse 1

Premisse 2

⋮

Premisse n

Conclusie

●○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Redeneringen

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
 of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
 Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Als m, n natuurlijke getallen zijn,
 en als geldt dat $n = m + 1$,

Dan: is er geen natuurlijk getal k , zodanig dat $m < k < n$.

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
 of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
 Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Als m, n natuurlijke getallen zijn,
 en als geldt dat $n = m + 1$,

Dan: is er geen natuurlijk getal k , zodanig dat $m < k < n$.

We zeggen dat de conclusie *logisch volgt uit de premissen*.

Redeneringen

Een redenering kan geldig of ongeldig zijn. Wanneer is een redenering geldig? En waarom? En wat bedoelen we daar mee?

Een redenering is niet afhankelijk van hoe de wereld toevallig in elkaar steekt. In zekere zin doen de feiten er niet toe:

Alle vissen zijn zoogdieren.

Moby Dick is een vis.

Moby Dick is een zoogdier.

Redeneringen

Een redenering kan geldig of ongeldig zijn. Wanneer is een redenering geldig? En waarom? En wat bedoelen we daar mee?

Een redenering is niet afhankelijk van hoe de wereld toevallig in elkaar steekt. In zekere zin doen de feiten er niet toe:

Alle vissen zijn zoogdieren.

Moby Dick is een vis.

Moby Dick is een zoogdier.

De geldigheid van een redenering zegt niets over of de premissen en conclusie waar zijn.

Waarheid van de premissen en de conclusie alleen is onvoldoende grond voor de geldigheid van een redenering.

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

Als Klaas heeft gelogen, dan is de moeder van Klaas ongelukkig.
Klaas heeft niet gelogen.

De moeder van Klaas is ongelukkig.

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

Als Klaas heeft gelogen, dan is de moeder van Klaas ongelukkig.
Klaas heeft niet gelogen.

De moeder van Klaas is ongelukkig.

Klaas of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
Piet heeft zich aangegeven.

Klaas heeft zich niet aangegeven.

Geldigheid

Definitie (Geldigheid)

We zeggen dat een redenering geldig is *dan en slechts dan als* (desda) het volgende het geval is: als de premissen waar zijn, dan is de conclusie waar. Anders: als de premissen niet waar kunnen zijn, zonder dat de conclusie dat ook is.

○○○○○●
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Samenvatting

- Redeneringen zijn rijtjes zinnen bestaande uit premissen en conclusie.
- Redeneringen kunnen geldig zijn of ongeldig.
- De geldigheid van de redenering is niet afhankelijk van de waarheid van de zinnen die voorkomen in de redenering.

Vorm van de redenering

Neem de volgende geldige redeneringen.

Als Marie naar het feest komt, dan komt Jan ook naar het feest.
Marie komt naar het feest.

Jan komt naar het feest.

Als Kees naar het feest komt, dan komt Thea ook naar het feest.
Kees komt naar het feest.

Thea komt naar het feest.

Als het regent, dan wordt de auto nat.
Het regent.

De auto wordt nat.

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

Als p , dan q .

p

q

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

Als p , dan q .

p

q

p of q

niet- p

q

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

Als p , dan q .

p

q

p of q

niet- p

q

- Geldige redeneringen hebben een bepaalde *vorm* gemeen.
- Deze vorm is verantwoordelijk voor de geldigheid.

Logische constanten

Als Piet naar de bioscoop gaat, dan gaat Jan naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Piet gaat naar de bioscoop of Jan gaat naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Logische constanten

Als Piet naar de bioscoop gaat, dan gaat Jan naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Piet gaat naar de bioscoop of Jan gaat naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

$$\frac{\text{Als } p, \text{ dan } q}{p}$$

$$q$$

$$\frac{p \text{ of } q}{p}$$

$$q$$

Kennelijk kunnen *als ... , dan ...* en *of* niet zomaar veranderd worden in het redeneerschema.

Logische constanten

$$\frac{\text{Als } p, \text{ dan } q}{p} \\ q$$

$$\frac{p \vee q}{p} \\ q$$

Logische constanten

$$\frac{\text{Als } p, \text{ dan } q}{p} \\ q$$

$$\frac{p \vee q}{p} \\ q$$

Naast de vorm van het redeneerschema hangt de geldigheid af van de *betekenis* van de uitdrukkingen *of* en *als ... , dan ...*. En ook de uitdrukkingen *niet*, *of*, *en* en *dan* en *slechts dan als*. Deze uitdrukkingen worden wel *logische constanten* genoemd.

In het volgende gedeelte zullen we kijken naar de logica die de geldige redeneringen met deze uitdrukkingen beschrijft: de propositielogica. Dit zijn niet de enige uitdrukkingen die interessante logische eigenschappen hebben. Denk aan *voor alle x* , *voor sommige y* , *ik weet dat ...*, *het is noodzakelijk dat ...*, etc.

Samenvatting

- Conclusies volgen noodzakelijk uit premissen in geldige redeneringen.
- Geldigheid wordt uitgedrukt in termen van waarheid maar is daar niet zondermeer van afhankelijk.
- Geldigheid hangt af van de vorm van het redeneerschema, en,
- De betekenis van bepaalde uitdrukkingen, bijvoorbeeld *en*, *of*, *niet*, *als ...*, *dan*

Propositielogica

Redeneringen	Propositielogica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	●○	○○○○○ ○○○○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

○○○○○○
○○○○○

●○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*

○○○○○○
○○○○○

●○

○○○○○
○○○○○○
○○○○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○
○○○

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
Berend loopt naar het station en het regent hard

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon

○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○○
○○○○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○
○○○

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld

Berend loopt naar het station

en

het regent hard

○○○○○○
○○○○○

○●

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

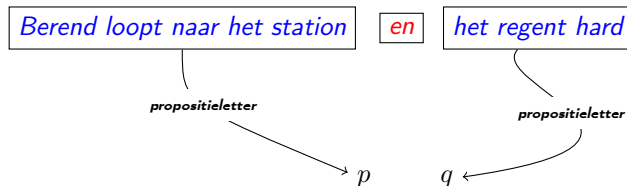
○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

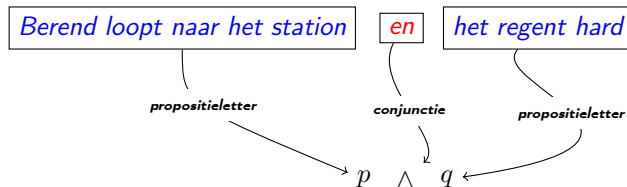
Voorbeeld



Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld



Syntaxis

De syntaxis van een formele taal bestaat, net als een natuurlijke taal, uit twee componenten

1. Een vocabulaire ($\approx$ alfabet), de symbolen die we gaan gebruiken.
2. De syntaxis, regels die éénduidig vastleggen hoe we van de symbolen zinnen, ofwel *formules* van de taal kunnen vormen.

Vocabulaire

Het vocabulaire van de propositie logica bestaat uit de volgende componenten:

Propositie letters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositie letters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h . Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

Redeneringen	Propositielogica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	●○○○ ○○○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h . Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

○○○○○○
○○○○○

○○

○●○○○
○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken:
Stel 'Jan huilt' voor door de letter *h*. Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huult' voor door de letter h . Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

Logische symbolen

Symbol	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huult' voor door de letter h . Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes om ambiguïteit te voorkomen.

Bijvoorbeeld:

- (1) Het is niet zo dat het regent en Amsterdam de hoofdstad is van Nederland.
 - a. Vertaling 1: $\neg(p \wedge q)$
 - b. Vertaling 2: $\neg p \wedge q$

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter *h*. Maar we gebruiken ook andere letters

$$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$$

Logische symbolen

Symbol	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes, (,), om ambiguïteit te voorkomen.

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○●○
○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Vocabulaire

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h . Maar we gebruiken ook andere letters

$p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes, (,), om ambiguïteit te voorkomen.

We zullen nu alles in een mooie overzichtelijke definitie zetten.

Vocabulaire

Laten we de taal der propositie logica $\mathcal{L}$ noemen.

Definitie (Vocabulaire van $\mathcal{L}$)

Het vocabulaire van de propositie logica $\mathcal{L}$ zal bestaan uit de volgende symbolen:

1. Symbolen voor propositie letters: $p, q, r, s, t, \dots$. Soms gebruiken we indices: $p_1, p_2, \dots, p_k$.
2. Symbolen logische constanten $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$.
3. Symbolen voor leesbaarheid: $), ($.

Redeneringen	Propositielogica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	○○○○ ●○○○○○ ○○	○ ○○○ ○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○	○○○ ○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Formules

Met de symbolen van de vocabulaire kunnen we nu met behulp van vaste regels samengestelde uitdrukkingen of zinnen van de propositielogica maken. Deze uitdrukkingen worden *(welgevormde) formules* genoemd.

Formules

Met de symbolen van de vocabulaire kunnen we nu met behulp van vaste regels samengestelde uitdrukkingen of zinnen van de propositie logica maken. Deze uitdrukkingen worden (*welgevormde*) *formules* genoemd.

Definitie (Syntaxis van $\mathcal{L}$)

1. Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van $\mathcal{L}$.
2. Als ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan is $\neg\psi$ dat ook.
3. Als φ, ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan zijn $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules van $\mathcal{L}$.
4. Niets, behalve wat op grond van een eindig aantal toepassingen van clausules (1)-(3) is gegenereerd is een formule van $\mathcal{L}$.

Formules

Formules

Terzijde

De definitie op de vorige slide is een voorbeeld van een *recursieve definitie*. Deze definities worden bijvoorbeeld gebruikt om met een eindig aantal (simpele) regels, oneindige verzamelingen te definiëren.

Voorbeeld (Natuurlijke getallen)

$$0 \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$\text{Als } n \in \mathbb{N}, \text{ dan } n + 1 \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Niets is een element van $\mathbb{N}$ behalve wat op grond van (1) en (2) is verkregen.

Redeneringen	Propositie logica	Syntax	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	○○○○○ ○○●○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Constructiebomen

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○●○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

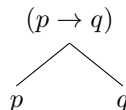
○○○○
○○○

Constructiebomen

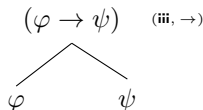
Neem de volgende formule: $(p \rightarrow q)$.

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $(p \rightarrow q)$.



Dit hadden ook een willekeurige formules φ, ψ kunnen zijn geweest:



waar bijvoorbeeld $\varphi := ((p \wedge r) \rightarrow s)$ en $\psi := \neg(q \leftrightarrow q)$. In dit geval spreken we van een *schematische weergave*.

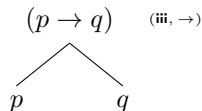
○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○
○○●○○
○○○○
○○○
○○
○○
○○○○○○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○
○○○

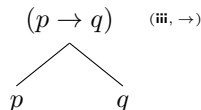
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $(p \rightarrow q)$.

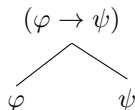


Constructiebomen

Neem de volgende formule: $(p \rightarrow q)$.



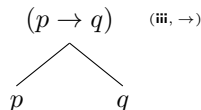
Dit hadden ook een willekeurige formules φ, ψ kunnen zijn geweest:



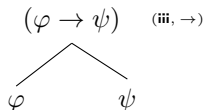
waar bijvoorbeeld $\varphi := ((p \wedge r) \rightarrow s)$ en $\psi := \neg(q \leftrightarrow q)$. In dit geval spreken we van een *schematische weergave*.

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $(p \rightarrow q)$.



Dit hadden ook een willekeurige formules φ, ψ kunnen zijn geweest:



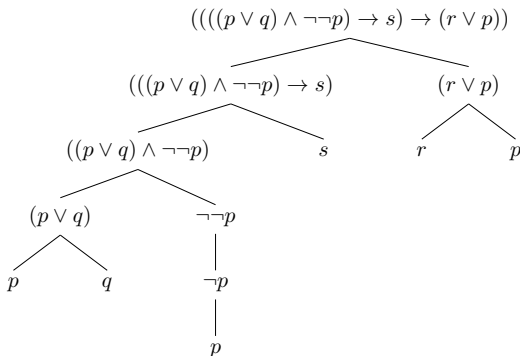
waar bijvoorbeeld $\varphi := ((p \wedge r) \rightarrow s)$ en $\psi := \neg(q \leftrightarrow q)$. In dit geval spreken we van een *schematische weergave*.

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p)).$

Constructiebomen

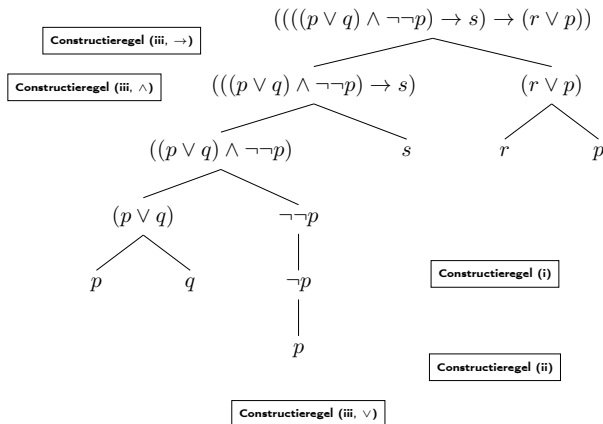
Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.





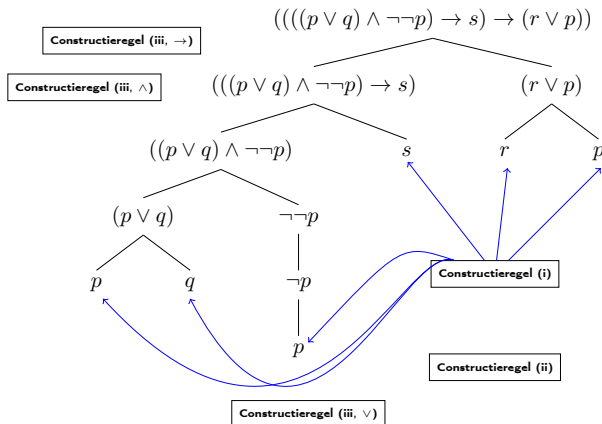
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



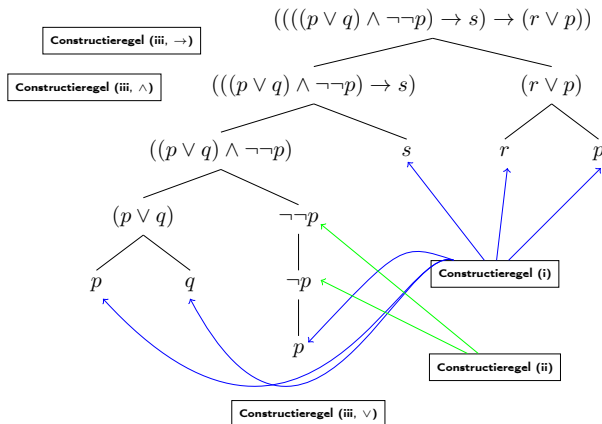
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○●○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○

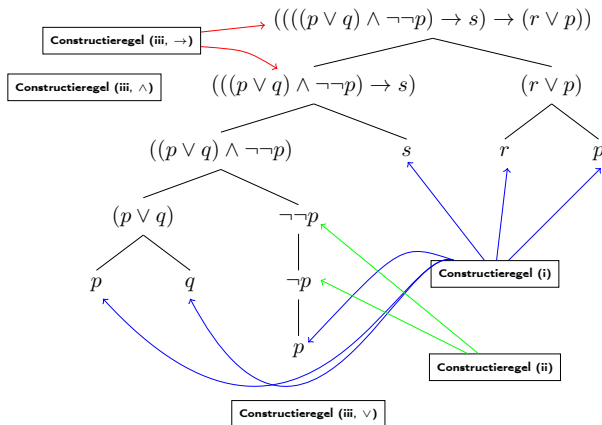
○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



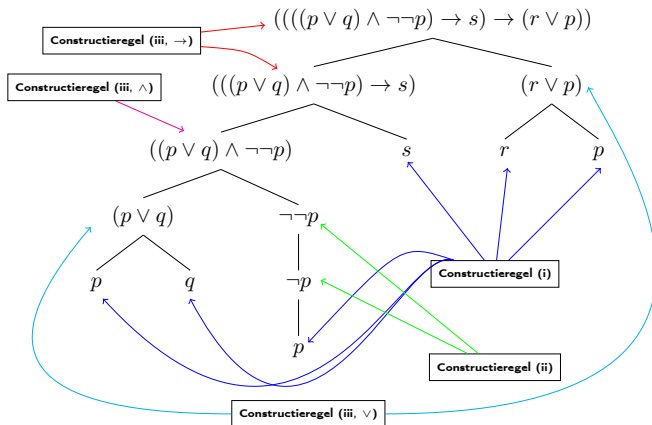
○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○●○○
○○○○
○○○
○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○
○○○

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg \neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○●○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Formules

Welgevormde formules

1. p
2. $\neg\neg p$
3. $(p \wedge p)$
4. $\neg(p \vee q)$
5. $(\neg(p \vee q) \wedge p)$
6. $\neg((p \vee q) \wedge p)$

Niet welgevormde formules

1. pqr
2. $(p$
3. $p\neg$
4. $\vee q$
5. $(\neg p \leftrightarrow r \vee s)$
6. $\rightarrow \vee \wedge$

Welgevormde formules

Oefening

Ga na of de volgende formules welgevormd zijn. Als dat het geval is, geef dan een constructieboom van de formule.

1. $pq \rightarrow$
2. $\neg(p \leftrightarrow (r \vee s))$
3. $(p \leftrightarrow \neg(r \vee s))$
4. $(p) \wedge p$
5. $((p \wedge q) \vee (s \rightarrow r))$
6. $((((p \rightarrow q) \rightarrow \neg r) \leftrightarrow s) \vee (t \wedge u))$
7. $\rightarrow \wedge pq \vee pq$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.

$p := \text{het regent}, q := \text{Kees is ziek.}$

$p \wedge q$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.

$p := \text{het regent}, q := \text{Kees is ziek.}$

$p \wedge q$

2. Fred noch Karel komt naar het feest.

$p := \text{Fred komt naar het feest}, q := \text{Karel komt naar het feest}$

$\neg p \wedge \neg q$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.

$p := \text{het regent}, q := \text{Kees is ziek.}$

$p \wedge q$

2. Fred noch Karel komt naar het feest.

$p := \text{Fred komt naar het feest}, q := \text{Karel komt naar het feest}$

$\neg p \wedge \neg q$

3. Het regent of het regent niet.

$p := \text{Het regent}$

$p \vee \neg p$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.

$p :=$ het regent, $q :=$ Kees is ziek.

$p \wedge q$

2. Fred noch Karel komt naar het feest.

$p :=$ Fred komt naar het feest, $q :=$ Karel komt naar het feest

$\neg p \wedge \neg q$

3. Het regent of het regent niet.

$p :=$ Het regent

$p \vee \neg p$

4. Als het regent en Rutte premier is, dan neemt Rutte de dienstwagen.

$p :=$ het regent, $q :=$ Rutte is premier, $r :=$ Rutte neemt de dienstwagen

$(p \wedge q) \rightarrow r$

Vertalingen

Oefening

Geef vertalingen van de volgende zinnen in propositielogica:

1. Dit is niet geschreven met pen of potlood.
2. Jan komt, alleen als Piet niet komt.
3. We gaan naar het strand, tenzij het regent.
4. Als het regent en de zon schijnt, verschijnt er een regenboog.
5. Niemand lachte of applaudiseerde.
6. Jan gaat naar school en als de zon schijnt, dan Theresa ook.

Samenvatting

- Een formele taal bestaat uit een vocabulaire en regels die éénduidig vastleggen hoe de symbolen van het vocabulaire aaneengeregen moeten worden.
- Zo bestaat de syntaxis van propositielogica uit propositieletters, een symbool voor negatie, connectieven, haakjes en regels wat formules zijn (en wat niet)
- Veel natuurlijk taal uitdrukken hebben een logische structuur die goed te beschrijven is met propositielogica.

Semantiek van de propositielogica

Nu we weten hoe formules er uitzien moeten we kijken wat ze betekenen.

De kleinste bouwstenen van onze taal zijn propositieletters die staan voor proposities. Een propositie is een bewering of uitspraak over de wereld uitgedrukt in een zin:

(2) Geert fietst.

De zinnen die proposities uitdrukken beschrijven situaties of standen van zaken en kunnen waar zijn of onwaar zijn (maar niet allebei). Met behulp van de negatie en de connectieven kunnen we propositieletters verbinden om complexere situaties te beschrijven.

(3) We gaan naar het strand of naar de film, maar niet allebei.

Waarheid

Iedere propositie heeft een zogenaamde *waarheidswaarde*. Een propositie kan waar zijn, we schrijven dan 1, of onwaar, we schrijven 0. De waarheidswaarde correspondeert met de stand van zaken in de wereld.

We zijn echter niet echt geïnteresseerd in het verifiëren van de waarheid van een propositie. We zijn geïnteresseerd in de *voorwaarden* waaronder een propositie (en de zin die haar uitdrukt) waar maakt. Hoe moet de wereld er uitzien wil een propositie waar zijn. Deze voorwaarden zullen de basis vormen voor de betekenis van de zinnen van de propositielogica.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○●○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
●●○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
 - Dus 4 mogelijkheden!
1. p waar, q waar,
 2. p waar, q onwaar,
 3. p onwaar, q onwaar,
 4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
●●○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station **en** het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

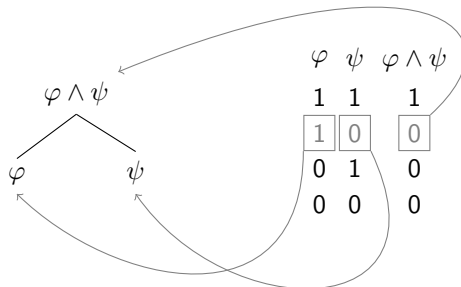
1. p waar, q waar $\implies p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar $\implies p \wedge q$ onwaar.

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

Compositionality



Compositionality

Definitie (Principe van compositionality van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd.

Compositionality

Definitie (Principe van compositionality van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd.

Om dus de betekenis van een zin te bepalen zullen we zinnen dus moeten ontleden en kijken naar de betekenis van de delen waaruit die zin is opgebouwd.

Conjunctie

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○
○●○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Negatie

De waarheidstafel van de negatie ziet er als volgt uit:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Waarheidstafel van de negatie

Disjunctie

De waarheidstafel van de disjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Waarheidstafel van de disjunctie

Implicatie

De waarheidstafel van de implicatie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Waarheidstafel van de implicatie

Bi-implicatie

De waarheidstafel van de equivalentie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Waarheidstafel van de equivalentie

Alle waarheidstafels op een rij

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunctie

p	$\neg p$
1	0
0	1

Negatie

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunctie

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicatie

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bi-implicatie

Berekenen waarheid samengestelde formules

(4) We vergelijken de volgende formules

a. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$

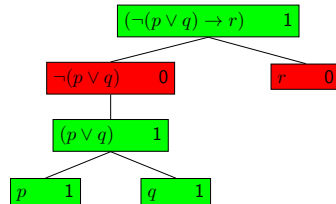
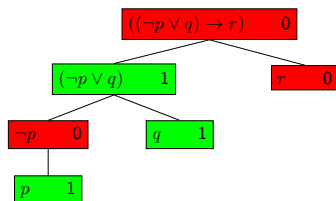
b. $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$

Berekenen waarheid samengestelde formules

(4) We vergelijken de volgende formules

- $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$
- $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$

Stel we nemen p waar, q waar en r onwaar.



Semantiek

Het idee van de semantiek van propositielogica is nu als volgt:

1. Geef een waarheidswaarde (= valuatie) aan iedere propositieletter in de taal.
2. Definiëer voor iedere syntactische operatie, i.e., de constructieregels van de syntaxis, een corresponderende semantische operatie, i.e., de waarheidstafels, waar het 'resultaat' wordt bepaald door de semantische waarden van de delen.

Vervolgens kan je de waarheidswaarde van iedere mogelijke formule bepalen. We kunnen dit preciezer maken met behulp van zogenaamde *valuatiefuncties*.

Herhaling: functiebegrip

Definitie (Functie)

Een functie is een regel die elementen uit een verzameling verbindt met elementen uit een andere verzameling met als voorwaarde dat ieder argument een unieke waarde heeft.

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
●○○○○

○○○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

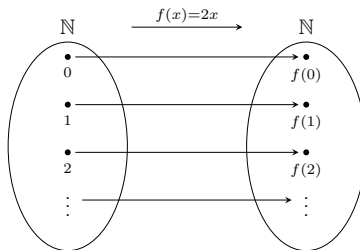
○○○○
○○○

Herhaling: functiebegrip

Definitie (Functie)

Een functie is een regel die elementen uit een verzameling verbindt met elementen uit een andere verzameling met als voorwaarde dat ieder argument een unieke waarde heeft.

Voorbeeld ($f(x) = 2x$)



Valuatiefunctie voor $\mathcal{L}$

Definitie

Een valuatiefunctie V voor de taal $\mathcal{L}$ van propositielogica is een functie van de formules $\mathcal{F}$ van $\mathcal{L}$ naar waarheidswaarden:

$$V : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$$

zodanig dat, als p een propositieletter en φ, ψ formules, dan:

voor iedere $p \in \mathcal{F}$, $V(p) = 1$ of $V(p) = 0$,

$V(\neg\psi) = 1$ desda $V(\psi) = 0$,

$V(\varphi \wedge \psi) = 1$ desda $V(\varphi) = 1$ en $V(\psi) = 1$,

$V(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ desda $V(\varphi) = 0$ of $V(\psi) = 1$,

$V(\varphi \vee \psi) = 1$ desda $V(\varphi) = 1$ of $V(\psi) = 1$,

$V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ desda $V(\varphi) = V(\psi)$.

Voorbeeld

Neem de formule $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. De waarheidstafel ziet er als volgt uit:

	p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$V_1 :$	1	1	1	1	1	1
$V_2 :$	1	1	0	1	0	1
$V_3 :$	1	0	1	0	1	1
$V_4 :$	1	0	0	0	0	0
$V_5 :$	0	1	1	0	0	0
$V_6 :$	0	1	0	0	0	0
$V_7 :$	0	0	1	0	0	0
$V_8 :$	0	0	0	0	0	0

Samenvatting

- Propositionen beschrijven standen van zaken in de wereld en kunnen waar of onwaar zijn.
- De betekenis van de logische constanten hebben we gedefiniëerd door de voorwaarden te geven waaronder ze waar zijn (*waarheidsconditionele semantiek*). De betekenis wordt dus uitgedrukt in termen van waarheid.
- De waarheid van een samengestelde zin is een functie van de waarheid van de delen van die zin (*compositionaliteit*).
- Met behulp van waarheidstafels kunnen we de waarheid van samengestelde formules berekenen.

Oefening

Maak waarheidstafels voor de volgende formules:

1. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
2. $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
3. $(q \wedge \neg q)$
4. $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$
5. $((p \wedge q) \vee r)$
6. $(p \wedge (q \vee r))$

Redeneringen	Propositielogica	Syntaxis	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	○○○○ ○○○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	●○○ ○○○	○○○○○○○○○ ○○○	○○○○ ○○○	

Logische eigenschappen van formules

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$V_1 :$	1	0	1
$V_2 :$	0	1	1

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$V_1 :$	1	0	1
$V_2 :$	0	1	1

Is $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ een tautologie?

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$V_1 :$	1	0	1
$V_2 :$	0	1	1

Is $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ een tautologie?

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○●○
○○○○

○○○○○○○○○
○○○

○○○○
○○○

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Contradictie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *contradictie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 0$.

Voorbeeld

	p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
$V_1 :$	1	0	0
$V_2 :$	0	1	0

Is $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$ een contradictie?

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Contingentie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *contingentie* is desda φ noch een tautologie, noch een contradictie is, i.e., er zijn valuaties V_i en V_j zodanig dat $V_i(\varphi) \neq V_j(\varphi)$.

Voorbeeld (Propositieletters)

p
$V_1 : 1$
$V_2 : 0$

Logische equivalentie

Gegeven valuatiefuncties en waarheidstafels kunnen we nu gemakkelijk formules gaan vergelijken. Zo hebben we bijvoorbeeld de notie van *logische equivalentie* geïntroduceerd.

Definitie

We zeggen dat formules φ, ψ van de propositielogica logische equivalent zijn desda voor alle valuatiefuncties V geldt dat $V(\varphi) = V(\psi)$. In dit geval schrijven we $\varphi \equiv \psi$.

Logische equivalentie

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
$V_1 :$	1	0	1
$V_2 :$	0	1	0

Logische equivalentie

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
$V_1 :$	1	0	1
$V_2 :$	0	1	0

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$
$V_1 :$	1	1	0	0	0	0
$V_2 :$	1	0	0	1	1	1
$V_3 :$	0	1	1	0	1	1
$V_4 :$	0	0	1	1	1	1

© 2011 Blackwell Publishing Ltd *Journal of Internal Medicine* 270: 105–114

1. $\varphi \equiv (\varphi \wedge \varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi)$
2. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (Wet van De Morgan)
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (Wet van De Morgan)
4. $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Contrapositie)
5. $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (Distributiewet)
6. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ (Distributiewet)

—

100

Samenvatting

- Met behulp van valuatiefuncties kunnen we eigenschappen toekennen aan formules (contingentie, tautologie, contradictie).
- Met behulp van deze begrippen kunnen we formules vergelijken.
- We hebben gezien wanneer formules *logisch equivalent* zijn.

Geldigheid

Aan het begin van deze lezing hebben we gezegd dat we willen weten wanneer redeneringen geldig zijn (en wanneer niet), dat wil zeggen: wanneer volgt een formule logisch uit premissen. We zijn nu in een positie hier een antwoord op te geven.

○○○○○○
○○○○○

○○

○○○○○
○○○○○○
○○○

○
○○○
○○
○○○○○○○
○○○○○

○○○
○○○○

●○○○○○○○ ○○○○
○○○ ○○○

Geldigheid

Aan het begin van deze lezing hebben we gezegd dat we willen weten wanneer redeneringen geldig zijn (en wanneer niet), dat wil zeggen: wanneer volgt een formule logisch uit premissen. We zijn nu in een positie hier een antwoord op te geven.

Definitie

Zij $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ formules van $\mathcal{L}$. We zeggen dat ψ een *logisch gevolg* is van $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ desda:

Als voor alle V geldt dat als $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$, dan $V(\psi) = 1$

In dit geval schrijven we $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Deze definitie zegt niets anders dan dat als de premissen waar zijn, dan is de conclusie dat ook.

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$\neg p$	
1	1	1	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	1	1	0	
0	1	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	$\Leftarrow$
0	0	1	0	1	0	1	1	$\Leftarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	$\Leftarrow$

$$p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1



Redeneringen	Propositie logica	Syntax	Semantiek	Eigenschappen	Geldigheid	Natuurlijke deductie	Afronding
○○○○○○ ○○○○○	○○	○○○○ ○○○○○ ○○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○○	0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0	○○○○○ ○○○	

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	1

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$	p
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$	p
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

⇐

⇐

⇐



$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$	p
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0



Tegenvoorbeelden

We hebben gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als in alle gevallen waar de premissen waar zijn, de conclusie dat ook is. Als er een situatie mogelijk is waar de premissen waar zijn maar de conclusie onwaar, betekent dit dus dat de redenering *ongeldig* is wat we kunnen aantonen door het geven van een *tegenvoorbeeld*.

Op de vorige slide is het tegenvoorbeeld dus:

$$V(p) = 0, V(q) = 1, V(r) = 0.$$

Tegenvoorbeelden

We hebben gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als in alle gevallen waar de premissen waar zijn, de conclusie dat ook is. Als er een situatie mogelijk is waar de premissen waar zijn maar de conclusie onwaar, betekent dit dus dat de redenering *ongeldig* is wat we kunnen aantonen door het geven van een *tegenvoorbeeld*.

Op de vorige slide is het tegenvoorbeeld dus:

$$V(p) = 0, V(q) = 1, V(r) = 0.$$

Het kan natuurlijk voorkomen dat er meerdere tegenvoorbeelden zijn te formuleren.

Tegenvoorbeelden

Voorbeeld (Voorbeeld 2.4, Van Benthem et al., *Logic in Action*, p. 2-3)

*If you take my medication, you will get better.
But you are not taking my medication.*

You will not get better.

Tegenvoorbeelden

Voorbeeld (Voorbeeld 2.4, Van Benthem et al., *Logic in Action*, p. 2-3)

*If you take my medication, you will get better.
But you are not taking my medication.*

You will not get better.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Samenvatting

- We hebben geleerd hoe we aan de hand van een waarheidstafel kunnen onderzoeken of een redenering geldig is.
- Opvallend is dat we de geldigheid (of ongeldigheid) gewoon kunnen aflezen.
- Dit is een *algorithm*e dat altijd zal uitwijzen of een redenering (in de propositielogica) geldig is of niet.

Oefening

Onderzoek m.b.v. waarheidstafels de geldigheid van volgende redeneringen. Specificeer in het geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.

1. $p \wedge q / p$
2. $p \rightarrow (q \wedge \neg q) / \neg p$
3. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r / r$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r) / (p \wedge q) \rightarrow r$

Puzzles

Puzzle 1

In de hal zijn twee deuren. Het volgende staat op de deuren geschreven:

Deur 1 In deze kamer zit een prins en in de andere een tijger.

Deur 2 In één van deze kamers zit een prins en in één van deze kamers zit een tijger.

De keizerin zegt dat precies één van de twee zinnen onwaar is. Hoe zou de jongedame met behulp van een waarheidstafel haar keuze bepalen?

Puzzles

Helden en leugenaars

Een reiziger komt in een land dat wordt bevolkt door mensen die of een held of een leugenaar zijn. Helden spreken altijd de waarheid (behalve misschien bij het invullen van hun belastingaangifte). Leugenaars liegen altijd.

Puzzle 2

De reiziger ontmoet twee personen A en B . A zegt: "Ten minste één van ons is een leugenaar." Wat zijn A en B ?

Semantische & syntactische geldigheid

Tot nu toe hebben we redeneringen bestudeerd door te kijken naar de semantiek of betekenis van de zinnen die in een redenering voorkomen. De betekenis hebben we vervolgens uitgedrukt in termen van waarheid. Door gebruik te maken van waarheidstafels kunnen we aflezen of een redenering geldig is. We hebben namelijk gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als, in die gevallen dat de premissen waar zijn, is de conclusie ook waar: de waarheid van de premissen accepteren dwingt men om ook de conclusie te accepteren. We zouden deze notie van geldigheid *semantisch* kunnen noemen omdat het gebaseerd is op de betekenis van zinnen.

Semantische & syntactische geldigheid

De semantische notie van geldigheid is niet de enige notie van geldigheid. We zullen nu kijken naar wat ook wel een *syntactische notie van geldigheid* wordt genoemd. Deze notie baseert zich op hoe redeneringen voorkomen als opeenvolging van *redeneerstappen* en manipulatie van de syntactische vorm van formules met als doel om de beoogde conclusie te bewijzen.

Semantische & syntactische geldigheid

We introduceren een voorlopige definitie.

Definitie

Een redenering is geldig dan en slechts dan als er een correct bewijs bestaat van de conclusie van die redenering uit de premissen.

In plaats van dat we geldigheid van een redenering definiëren als waarheid van de conclusie in alle gevallen waar de premissen waar zijn, willen we geldigheid van een redenering dus definiëren als het bestaan van een *bewijs* van de conclusie uit de premissen. De equivalentie in deze voorlopige definitie (“dan en slechts dan als”) is belangrijk. Als je een fout maakt in een bewijs (denk bijvoorbeeld aan een wiskunde proefwerk) hoeft dat natuurlijk niet te betekenen dat er helemaal geen correct bewijs bestaat. Je hebt pas aangetoond dat een redenering ongeldig is als je hebt laten zien dat er geen correct bewijs van de conclusie uit het gegeven bestaat.

Afleidingsregels

Zie de handout op

http://events.illc.uva.nl/MasterClass/Logica2017/uploaded_files/inlineitem/1handout-natuurlijke-deductie.pdf

Correctheid en volledigheid

We hebben nu twee zeer verschillende noties van geldigheid bestudeerd en een vraag die zich dan aandient is hoe deze noties zich tot elkaar verhouden. Het bijzondere is dat alhoewel deze noties zeer verschillend zijn ze toch van dezelfde redeneringen zeggen dat ze geldig zijn (of niet). Deze bewering valt uiteen in twee stellingen.

Correctheid

Stelling (Correctheidsstelling propositielogica)

Als $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ formules zijn van de propositielogica, dan

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi \implies \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$$

Deze stelling zegt dat als er een afleiding bestaat van ψ uit formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dan volgt dit ook semantisch, dwz. een waarheidstafel zal hetzelfde uitwijzen. Een andere manier hoe je dit zou kunnen zeggen is dat ons afleidingssysteem zo in elkaar zit dat je geen onwaarheden af kan leiden.

Volledigheid

Stelling (Volledigheidsstelling propositiologica)

Als $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ formules zijn van de propositiologica, dan

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \implies \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

De volledighedsstelling is de andere richting op: als een formule ψ logisch volgt uit premissen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dan garandeert deze stelling dat er een afleiding van ψ is te maken uit die premissen, ook al vertelt de stelling er niet bij hoe die afleiding er uitziet.

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.
 - Hoe zijn zinnen gestructueerd?
 - Wat zijn de logische constanten van de taal en wat is hun betekenis?
 - Wat is de expressiviteit van de taal? Wat kan je er mee uitdrukken?
 - Wanneer zijn redeneringen geldig?
 - Wat is geldigheid en hoe kunnen we dat onderzoeken?
 - Wat is de relatie tussen de verschillende noties van geldigheid die we hebben bestudeerd?

Huiswerk

- Lees deze slides na en maak alle overgebleven oefeningen.

Huiswerk

- Lees deze slides na en maak alle overgebleven oefeningen.
- Lees de handout over natuurlijk deductie en maak alle oefeningen.

Huiswerk

- Lees deze slides na en maak alle overgebleven oefeningen.
- Lees de handout over natuurlijk deductie en maak alle oefeningen.
 - Te vinden op <http://events.illc.uva.nl/MasterClass/Logica2017/Leesmateriaal/>

Huiswerk

- Lees deze slides na en maak alle overgebleven oefeningen.
- Lees de handout over natuurlijk deductie en maak alle oefeningen.
 - Te vinden op <http://events.illc.uva.nl/MasterClass/Logica2017/Leesmateriaal/>
- Overleg online over de oefeningen.