

Handout Natuurlijke Deductie

Peter van Ormondt

10 mei 2017

1 Inleiding

In Van Benthem et al. (2016, Hoofdstuk 2), hebben we redeneringen bestudeerd door te kijken naar de semantiek of betekenis van de zinnen die in een redenering voorkomen. De betekenis hebben we vervolgens uitgedrukt in termen van waarheid. Door gebruik te maken van waarheidstafels kunnen we aflezen of een redenering geldig is. We hebben namelijk gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als, in die gevallen dat de premissen waar zijn, is de conclusie ook waar: de waarheid van de premissen accepteren dwingt men om ook de conclusie te accepteren. We zouden deze notie van geldigheid *semantisch* kunnen noemen omdat het gebaseerd is op de betekenis van zinnen.

De semantische notie van geldigheid is niet de enige notie van geldigheid. In deze handout zullen we kijken naar wat ook wel een *syntactische notie van geldigheid* wordt genoemd. Deze notie baseert zich op hoe redeneringen voorkomen als opeenvolging van *redeneerstappen* en manipulatie van de syntactische vorm van formules met als doel om de beoogde conclusie te bewijzen. Dit klinkt nu nog wat ongrijpbaar maar het zal in de loop van deze handout duidelijk worden wat hiermee wordt bedoeld. Wat belangrijk is is dat een *redenering* gezien wordt als een eindig rijtje zinnen; de eerste, gegeven zinnen heten de *premissen* van de redenering, de laatste wordt geacht de *conclusie* van de redenering te zijn, en de overige zinnen zijn de *stappen* van de redenering. De vraag of een redenering geldig is zullen we begrijpen als de vraag of het *bewijs* van de conclusie correct is.

We introduceren een voorlopige definitie:¹

¹Een formele definitie volgt in paragraaf 2, definitie 2.1.

Een redenering is geldig dan en slechts dan als er een correct bewijs bestaat van de conclusie van die redenering uit de premissen.

In plaats van dat we geldigheid van een redenering definiëren als waarheid van de conclusie in alle gevallen waar de premissen waar zijn, willen we geldigheid van een redenering dus definiëren als het bestaan van een *bewijs* van de conclusie uit de premissen. De equivalentie in deze voorlopige definitie (“dan en slechts dan als”) is belangrijk. Als je een fout maakt in een bewijs (denk bijvoorbeeld aan een wiskunde proefwerk) hoeft dat natuurlijk niet te betekenen dat er helemaal geen correct bewijs bestaat. Je hebt pas aangetoond dat een redenering ongeldig is als je hebt laten zien dat er geen correct bewijs van de conclusie uit het gegeven bestaat.²

De gedachte om het geldigheidsbegrip te vangen met een notie van correct bewijs is een gedachte die veel vaker voorkomt dan je misschien zou verwachten. Als een persoon in een discussie een bewering maakt zal die persoon desgevraagd door een gespreksgenoot argumenten of evidentie moeten geven die die stelling aannemelijk maakt. Denk aan de minister van Economische Zaken die in de Tweede Kamer verkondigt dat de koopkracht is toegenomen in Nederland. Iedereen verwacht dan dat de minister argumenten (cijfers van het CBS misschien) aandraagt die die conclusie staven.

Je zou kunnen zeggen dat *bewijs* zelfs het hart vormt van de exacte wetenschappen. Een goed voorbeeld is de Euclidische rekenkunde waar de waarheid van iedere stelling in de *De Elementen* wordt *bewezen* uit axioma’s, definities en afleidingsregels.³

Maar wanneer is een bewijs een goed, of zoals we zullen zeggen, een *correct* bewijs? Je zou *natuurlijke deductie* kunnen zien als een formeel antwoord op deze vraag. Een redenering begint (vaak) met premissen. Door nu aan de hand van regels formules te manipuleren kan je andere formules noteren die je *redeneerstappen* zou kunnen noemen. Zo ontstaat er een lijst van formules wat een *afleiding* wordt genoemd. We zullen dit idee in paragraaf 2 uitwerken maar we geven nu eerst wat voorbeelden.

Voorbeeld 1.1.

*Als het nu flink gaat vriezen, dan komt er toch nog een Elfstedentocht.
Het gaat nu flink vriezen. Dus, er komt een Elfstedentocht.*

²We zouden het dus ook negatief kunnen formuleren: een redenering is ongeldig dan en slechts dan als er geen correct bewijs voor bestaat.

³Zie voor meer informatie over bewijzen in de wiskunde Van Eijck and Visser (2005).

Als we deze zinnen vertalen in propositielogica en onder elkaar zetten krijgen we de volgende lijst zinnen:

1.	$p \rightarrow q$	Premisse
2.	p	Premisse
3.	q	Conclusie

We zien in dit voorbeeld dat de zin “Er komt een Elfstedentocht” (q) wordt bewezen uit de andere twee zinnen ($p \rightarrow q$ en p).⁴ Iedereen die de zinnen op stappen 1 en 2 accepteert zal ook de zin op stap 3 moeten accepteren: want als q wordt geïmpliceerd door p en als p het geval is, dan moet q ook het geval zijn.

We kijken naar nog een voorbeeld.

Voorbeeld 1.2. *Stel we weten dat Mark Rutte premier is en leraar maatschappijleer, $p \wedge q$, het geval is en we willen laten zien dat daar uit volgt dat Mark Rutte is leraar maatschappijleer en premier, $q \wedge p$. dan moet we dat aantonen met een redenering. Maar als we $p \wedge q$ hebben, dan hebben we toch ook p en q afzonderlijk, dwz. Mark Rutte is premier, en ook, Mark Rutte is leraar maatschappijleer. Maar als we p en q afzonderlijk hebben, dan hebben we ook $q \wedge p$.⁵*

1.	$p \wedge q$	Premisse
2.	p	tussenstap
3.	q	tussenstap
4.	$q \wedge p$	Conclusie

We zien dat we uit de premisse, via twee tussenstappen, bij de conclusie uitkomen. Dat deze tussenstappen gerechtvaardigd zijn, oftewel geldig, hebben we hierboven besproken. Waar we in het vervolg naar gaan kijken is welke geldige tussenstappen er nog meer zijn te maken.

⁴Dit is een toepassing van *modus ponens* of zoals we dit in paragraaf 2.2 zullen noemen de gebruiksregel van de implicatie.

⁵Dit zijn precies de afleiding- en introductieregels van de conjunctie die we zullen presenteren in paragraaf 2.1.

Wat opvalt is dat we slechts op grond van de syntactische vorm van de formule (een conjunctie in dit geval) deze afleidingen toestaan en niet op grond van de betekenis van de zinnen. Bijvoorbeeld: we zouden voorbeeld 1.1 kunnen herschrijven naar *Als je veel pakjes geeft, ben je een goedheiligman. Sinterklaas geeft veel pakjes. Sinterklaas is een goedheiligman.* en we zouden de conclusie nog steeds accepteren. Door slechts te kijken naar de syntactische structuur van formules abstraheren we van iedere interpretatie en kunnen we zo proberen te beschrijven wat correcte, geldige afleidingsregels zijn.

Laten we nu kijken naar een ongeldige afleidingsregel om het verschil goed duidelijk te maken. Stel we hebben de volgende afleiding:

1.	$p \vee q$	Premisse
2.	$p \rightarrow r$	Premisse
3.	r	Conclusie

Hier is het nog maar de vraag of r volgt uit $p \vee q$ en $p \rightarrow r$. Als ik weet dat $p \vee q$ dan is het moeilijk te zeggen wat daar uit kan volgen. Misschien is alleen q wel het geval en p niet, in welk geval ik niet met $p \rightarrow r$ tot r kan concluderen. Misschien maakt een concreet voorbeeld dit duidelijker. Neem de volgende zin *We gaan op vakantie naar Parijs of naar Londen en Als je in Parijs bent, kan je de IJfeltoren bezoeken.* Kan ik nu concluderen dat we op vakantie de IJfeltoren kunnen bezoeken? Dat is moeilijk te zeggen want als de disjunctie het geval is betekent dit niet dat beide disjuncten ook het geval zijn. Misschien gaan we juist naar Londen op vakantie en niet naar Parijs. Wat zou ik wel kunnen concluderen gegeven een disjunctie? Dat zou dan iets moeten zijn wat door beide disjuncten wordt geïmpliceerd (zie paragraaf 2.3 voor een verdere uitwerking van dit idee).

Dit brengt ons dus bij de vraag welke afleidingen toelaatbaar zijn, oftewel welke afleidingsregels geldig zijn? We willen een systeem optuigen dat ons vertelt wanneer een conclusie logisch volgt uit premissen. We zullen dus eerst gaan kijken naar de verschillende afleidingsregels voor de verschillende connectieven (zie paragraaf 2) die we in Van Benthem et al. (2016) hebben gezien.

Ten slotte, in paragraaf 3, zullen we de syntactische notie van geldigheid die we ontwikkeld hebben vergelijken met de semantische notie die we al kennen. We zullen dan zien dat alhoewel deze noties er zeer verschillend

uitzien ze toch volledig overlappen: beide noties zeggen van precies dezelfde redeneringen of ze geldig zijn of niet.

2 Afleidingsregels

In deze paragraaf zullen we de regels bekijken die ons vertellen welke formules we af mogen leiden uit andere. Al deze regels tezamen genomen noemen we een *afleidingssysteem*, *bewijssysteem* of *deductiesysteem*. Het specifieke systeem dat we gaan ontwikkelen wordt wel *natuurlijke deductie* genoemd en werd geïntroduceerd door (Gentzen, 1935).⁶ Dit systeem wordt “natuurlijk” genoemd omdat het bij benadering overeenkomt met redeneerstappen die we in het feitelijk redeneerproces gebruiken.

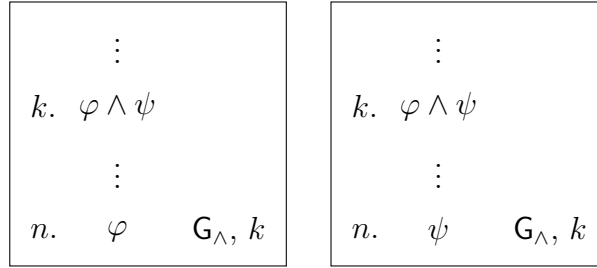
Natuurlijk deductie is niet het enige afleidingssysteem. In Van Benthem et al. (2016, § 2.7) wordt bijvoorbeeld een *axiomatisch afleidingssysteem* geïntroduceerd. Die opzet verschilt van de huidige in dat er een aantal *axioma*’s worden aangenomen en één afleidingsregel, nl. *modus ponens*. Het kan in dit systeem soms een stuk lastiger zijn om simpele formules te bewijzen, dit is waarom we gekozen hebben voor natuurlijke deductie. De vraag dient zich natuurlijk wel aan of in beide systemen dezelfde formules afgeleid kunnen worden? Maar dat is wel het geval. Een bewijs dat dat dit zo is zou hier te ver voeren.

Afleidingsregels zijn er in twee soorten: *gebruiksregels* en *introductieregels*. Deze twee regels corresponderen met, of misschien beter, zijn antwoorden op, de volgende twee vragen:

- (1) Gegeven een formule met een bepaalde vorm⁷, wat mag ik daar uit af leiden?
- (2) Wanneer mag ik een formule met een bepaalde vorm opvoeren in mijn afleiding?

⁶De termen *afleiding*, *bewijs* en *deductie* betekenen in de context van formele logica min of meer hetzelfde en worden, zoals ook hier is te zien, vaak door elkaar gebruikt.

⁷Met de vorm van een formule bedoelen we hoe de formule er schematisch uit ziet. Neem bijvoorbeeld de formule $\neg(p \vee q) \rightarrow r$ uit (Van Benthem et al., 2016, Example 2.4, p. 2-11). Deze formule is gevormd door de formules $\neg(p \vee q)$ en r te verbinden met het symbool voor implicatie. De hoofdstructuur van de formule bestaat dus uit twee (deel)formules met een implicatiesymbool en we noemen deze zin dan ook een *implicatie*. De zin $\neg(p \vee q)$ noemen we een *negatie*, omdat ze is gevormd door een negatiesymbool te plaatsen voor $p \vee q$. Vergelijkbaar worden zinnen ook een conjunctie, disjunctie of equivalentie genoemd.



Figuur 1: De gebruiksregels voor de conjunctie.

Gebruiksregels zullen we aanduiden met G_* waar in plaats van $*$ het symbool voor een van de connectieven wordt geplaatst. Introductieregels zullen we op dezelfde manier aanduiden met I_* .

Een voorbeeld van de gebruiksregels voor conjunctie, $G_{\wedge}$, hebben we al gezien in voorbeeld 1.2. Het hoeft in een afleiding natuurlijk helemaal niet zo te zijn dat de zin waar je een afleidingsregel op toepast aan het begin van de afleiding staat. Hierom zullen we de regels in wat volgt schematisch weergeven zoals in Figuur 1.

De schematische weergave van de gebruiksregels voor de conjunctie laat zien dat als een conjunctie $\varphi \wedge \psi$ ergens in een afleiding op stap k voorkomt, dit kan stap 1, stap 20 of 5000 zijn, we een van de twee conjuncten, φ of ψ , mogen concluderen op stap n en $k < n$, dwz. op een stap later na de stap waar de conjunctie voorkomt.

We zien dat op stap n ook genoemd wordt welke afleidingsregel en op welke stap van de afleiding deze regel wordt gebruikt. Op deze manier wordt voor iedere zin in de afleiding duidelijk wat de rechtvaardiging is van zijn voorkomen.

Het moge ook duidelijk zijn dat in een afleiding altijd concrete formules voorkomen en nooit een schematische weergave van formules.

Tot slot zullen we nu een formele definitie van een afleiding geven. Deze definitie zal waarschijnlijk een stuk duidelijker zijn na het lezen van de rest van deze paragraaf en het maken van wat afleidingen. Als het dus niet geheel duidelijk is kan je hier later naartoe terugbladeren.

Definitie 2.1 (Afleiding). Een *afleiding* $\mathcal{A}$ is een genummerde, eindige lijst formules van de propositielogica met daarachter de reden van het voorkomen van de formule in de afleiding. Op iedere stap $k \in \mathcal{A}$ kunnen we drie dingen doen:

1. Een premisse opvoeren.
2. Een assumptie opvoeren.⁸ Als een assumptie is opgevoerd dient deze weer ingetrokken te worden middels toepassing van $\text{I}_{\rightarrow}$ of $\text{I}_{\neg}$. Als op stappen m, n met $m < n$ assumpties worden opgevoerd dan moet eerst de assumptie van stap n worden ingetrokken voor die van stap m . Als een assumptie is opgevoerd op een stap $m \leq n$, dwz. vóór of met stap n , en deze assumptie is nog niet ingetrokken, dan zeggen we dat deze assumptie werkzaam is op stap n .
3. Een formule opvoeren die door toepassing van een van de afleidingsregels op een of meerdere van de voorgaande formules in de afleiding is verkregen.

Zoals gebruikelijk zullen we de premissen in een afleiding altijd bovenaan de lijst noteren. Als $\mathcal{A}$ een afleiding is met premissen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dan noemen we een formule ψ die onderaan de lijst staat de *conclusie* van $\mathcal{A}$ en zeggen dat ψ een *afleiding is uit* de premissen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. In dit geval schrijven we ook wel

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Het kan zijn dat de verzameling premissen leeg is. Dan is een formule dus zonder premissen te bewijzen. In dat geval schrijven we

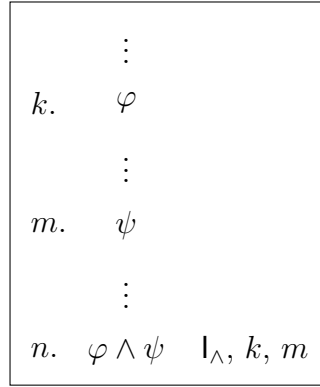
$$\vdash \psi.$$

2.1 Conjunctie

De gebruiksregel voor de conjunctie hebben we in het voorgaande besproken en we veronderstellen dat de toepassing duidelijk is geworden.

De introductieregel van de conjunctie, net als alle andere introductieregels, bepaalt onder welke omstandigheden een conjunctie $\varphi \wedge \psi$ afgeleid mag worden (zie Figuur 2). Het is misschien geen verrassing dat dit zo is als φ en ψ in de afleiding voorkomen. Bij deze regel maakt het niet uit of φ voor of na ψ in de afleiding voorkomt.

⁸In paragraaf 2.2 zullen we uitleggen wat een *assumptie* is en hoe deze wordt gebruikt.



Figuur 2: Introductieregel voor de conjunctie

Nu we de introductie- en gebruiksregels voor conjunctie hebben gezien kunnen we nu gaan kijken naar een concrete afleiding.

Voorbeeld 2.1. *We zoeken een afleiding die aantoont dat $p \wedge q \vdash q \wedge p$.*

1. $p \wedge q$	Premisse
2. p	$G_{\wedge}, 1$
3. q	$G_{\wedge}, 1$
4. $q \wedge p$	$I_{\wedge}, 2, 3$

We zien uit het bovenstaande dat uit $p \wedge q$ de formule $q \wedge p$ volgt, slechts door toepassing van de gebruiks- en introductieregel van de conjunctie.

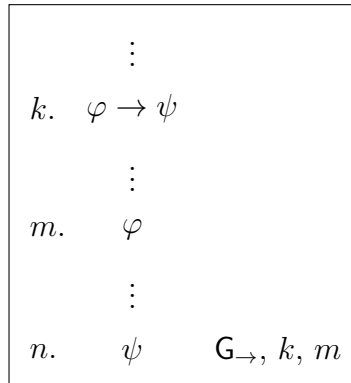
Een punt waar we in paragraaf 3 op terug zullen komen maar we nu al noemen is het volgende. Dat we uit $p \wedge q$ de formule $q \wedge p$ kunnen afleiden klopt met wat we op grond van de semantische notie van geldigheid kunnen verwachten. Een kleine waarheidstabel zal dit bevestigen. Alhoewel in een afleidingssysteem slechts naar de syntactische structuur van formules wordt gekeken zijn de regels zo opgesteld dat ze voldoen aan intuïties die we ook zijn tegengekomen bij het opstellen van de semantiek. Je zou kunnen zeggen dat de regels zo zijn opgesteld dat ze *waarheidsbehoudend* zijn.

Oefening 1. Maak een afleiding die aantoont dat

$$(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$$

2.2 Implicatie

De gebruiksregel van de implicatie, zie Figuur 3, hebben we al in de inleiding, paragraaf 1, voorbij zien komen en is duidelijk. Als in een afleiding een conditionele zin voorkomt én het antecedent van die conditionele zin, dan mogen we het consequent concluderen.⁹



Figuur 3: De gebruiksregel voor de implicatie.

De introductieregel van de implicatie is iets ingewikkelder. Onder welke omstandigheden in een afleiding zou je eigenlijk tot een formule $\varphi \rightarrow \psi$ mogen concluderen?

Om de introductieregel van de implicatie uit te leggen moeten we eerst uitleggen wat een *assumptie* is. We zijn deze term ook al tegengekomen in definitie 2.1. Een assumptie in een afleiding is een formule die we tijdelijk aannemen. In gewone conversatie zou je dit kunnen vergelijken met een uitdrukking als *Stel even dat ...*. Onder die aanname kunnen we formules afleiden, maar, en dit is het grote verschil met een premisse, assumpties moeten ook weer worden ingetrokken, anders zou je uit *Stel even dat het regent* af kunnen leiden *Het regent*, wat duidelijk geen geldige redenering is!

Als we echter onder aanname van een formule φ kunnen laten zien dat de formule ψ daar noodzakelijk, oftewel, met gebruikmaking van de afleidingsregels uit volgt, dan mogen we $\varphi \rightarrow \psi$ concluderen. Dit is een algemene bewijsstrategie voor conditionele zinnen, die we ook terugvinden in situaties buiten die van de natuurlijke deductie.

⁹Wellicht ten overvloede: een implicatie, $\varphi \rightarrow \psi$, wordt ook wel een *conditionele zin* genoemd. De (deel)formule vóór de pijl heet het *antecedent*, de (deel)formule na de pijl heet het *consequent*.



Om het voorgaande te verduidelijken kijken we nu naar een voorbeeld en zullen de stappen van de afleiding nalopen.

$$p \vdash q \rightarrow (p \wedge q)$$
10

Stap 1. Dit is de premisse van de redenering.

Stap 2. We merken op dat de formule die we moeten bewijzen uit p een implicatie is. Een goeie strategie is dan om het antecedent, q , aan te nemen, en proberen het consequent, $p \wedge q$, af te leiden. We voeren q dus op als assumptie.

Stap 3. Maar, omdat hier de assumptie q nog werkzaam is mogen we de introductieregel van de conjunctie toepassen op de eerste twee stappen en krijgen we $p \wedge q$ precies waar we naar op zoek waren. We hebben laten zien dat onder aanname van q , $p \wedge q$ volgt!

Stap 4. We kunnen nu de assumptie intrekken en de implicatie concluderen.

We zullen nu een wat complexer voorbeeld bekijken. Dit is tegelijk een voorbeeld van een afleiding van een formule zonder premissen.

Voorbeeld 2.3. *We geven een afleiding die aantoont dat*

$$\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)).$$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Assumptie
2.	p	Assumptie
3.	q	Assumptie
4.	$p \wedge q$	$I_{\wedge}, 2, 3$
5.	r	$G_{\rightarrow}, 1, 4$
6.	$q \rightarrow r$	$I_{\rightarrow}, 3, 5$
7.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$I_{\rightarrow}, 2, 6$
8.	$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$I_{\rightarrow}, 1, 7$

We zullen de stappen van de afleiding nu stuk voor stuk nagaan om een goed beeld te krijgen hoe deze afleiding in elkaar steekt.

Stap 1. We merken op dat de formule die afgeleid moet worden een implicatie is. De strategie om een implicatie te bewijzen is om het antecedent aan te nemen en het consequent af te leiden. We nemen dus $(p \wedge q) \rightarrow r$ aan als assumptie met als doel om het consequent $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ af te leiden.

- Stap 2. Gesteld voor de opgave om $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ af te leiden zien we dat deze formule ook een implicatie is. We passen dezelfde strategie toe en nemen het antecedent aan (p) met als uiteindelijk doel $q \rightarrow r$ af te leiden.
- Stap 3. Wederom doet zich een zelfde situatie voor en nu nemen we q aan om r af te leiden.
- Stap 4. Het bewijzen van r komt nu in zicht want we mogen nu $p \wedge q$ afleiden, en
- Stap 5. gegeven de eerste assumptie krijgen we r .
- Stap 6. Nu trekken we de assumptie van Stap 3 in en concluderen $q \rightarrow r$. Maar dit was precies het doel van de aanname p op Stap 2.
- Stap 7. We trekken dus p in en concluderen $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Wederom zien we dat dit precies de formule is die we wilde bewijzen onder de aanname op Stap 1.
- Stap 8. We trekken nu $(p \wedge q) \rightarrow r$ in en concluderen $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, wat de afleiding voltooit.

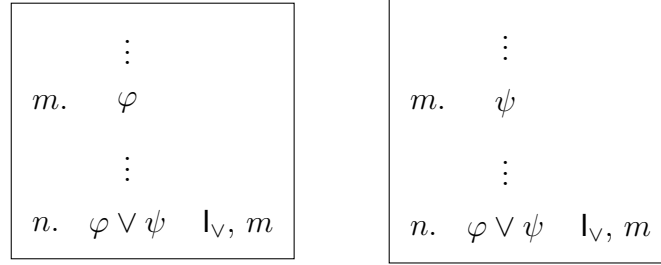
Oefening 2. Geef afleidingen die aantonen dat

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q &\vdash r \\ p, q, (p \wedge q) \rightarrow r &\vdash r \\ \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \end{aligned}$$

2.3 Disjunctie

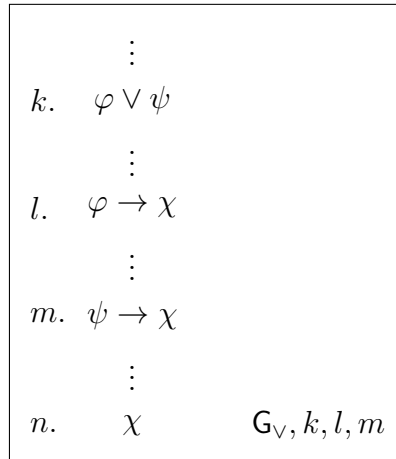
De introductieregels voor (inclusieve!) disjunctie (zie Figuur 5) zijn vrij eenvoudig. Als een formule φ is gegeven, dan weten we dat $\varphi \vee \psi$ het geval is, ongeacht of ψ nou het geval is of niet. Als we weten dat ψ het geval is mogen we $\varphi \vee \psi$ concluderen.

De gebruiksregel van de disjunctie is iets omvattender. Stel een disjunctie $\varphi \vee \psi$ is gegeven. Stel nu dat ik uit $\varphi \vee \psi$ een andere formule, zeg χ , wil concluderen. Het enige dat ik weet is dat tenminste één van de twee disjuncten het geval is. Dus laten zien dat χ uit φ volgt is niet voldoende, want φ is misschien wel helemaal niet het geval! Dit zelfde probleem hebben we



Figuur 5: De introductieregels voor disjunctie.

natuurlijk als χ uit ψ af zouden willen leiden. Dus om een formule χ uit een disjunctie $\varphi \vee \psi$ af te leiden moeten we dus zeker zijn dat beide disjuncten χ impliceren (zie Figuur 6).



Figuur 6: De gebruiksregel voor disjunctie.

Het volgende voorbeeld laat de introductieregel in actie zien.

Voorbeeld 2.4. *We geven een afleiding die aantoont dat*

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge q) \vdash q$$

1. $(p \wedge q) \vee (r \wedge q)$	Premisse
[2. $p \wedge q$	Assumptie
3. q	$G_{\wedge}, 2$
4. $(p \wedge q) \rightarrow q$	$I_{\rightarrow}, 2, 3$
[5. $r \wedge q$	Assumptie
6. q	$G_{\wedge},$
7. $(r \wedge q) \rightarrow q$	$I_{\rightarrow}, 5, 6$
8. q	$G_{\vee}, 1, 4, 7$

Oefening 3. Geef afleidingen die aantonen dat

$$p \vee q \vdash q \vee p$$

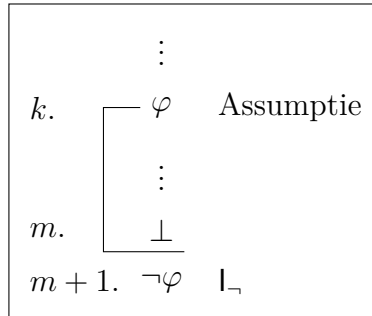
$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, s \rightarrow p \vdash p \wedge r$$

2.4 Negatie

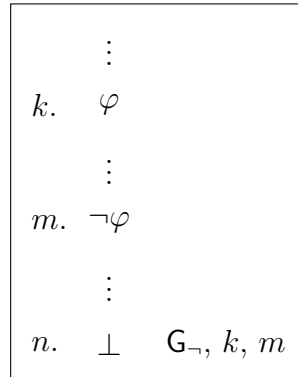
Onder welke omstandigheden mag je een negatie $\neg\varphi$ afleiden? Dat is misschien een rare vraag, want hoe kan je aantonen dat iets *niet* het geval is? Om te bewijzen dat $\neg\varphi$ gebruiken we het volgende idee. Stel, om $\neg\varphi$ te bewijzen, dat je de formule φ aanneemt. Als je dan kan laten zien dat dit onhoudbaar is, dwz. het gevolg van deze aanname is een contradictie. Dan mag je onder deze omstandigheden $\neg\varphi$ concluderen (zie Figuur 7). Het volgende informele voorbeeld zal deze bewijsstrategie, die ook in gewone conversaties voorkomt, illustreren:

1. Stel: mensen zijn vissen.
2. Dan hebben mensen kieuwen.
3. Mensen hebben helemaal geen kieuwen.
4. Dus: Mensen zijn geen vissen.

In Figuur 7 zien we een nieuw symbool: $\perp$. Dit symbool, ook wel het *falsum* genoemd, is een symbool dat we introduceren en staat voor een contradictie. Je zou het kunnen zien als een symbool voor $q \vee \neg q$, $0 = 1$, etc.



Figuur 7: De introductieregel voor de negatie.



Figuur 8: De gebruiksregel voor de negatie.

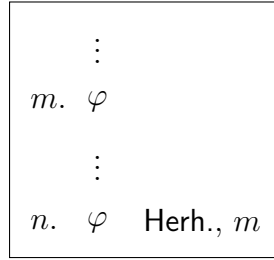
We mogen concluderen tot het falsum als we zowel φ en $\neg\varphi$ hebben en dit is de gebruiksregel voor de negatie (zie Figuur 8).

Oefening 4. Toon aan dat

$$\vdash p \rightarrow \neg\neg p$$

2.5 Overige regels

Tot slot zullen we nog drie regels bespreken. De eerste, zie Figuur 9, staat ons toe om een formule in de afleiding te herhalen.



Figuur 9: De Herhalingsregel.

Voorbeeld 2.5. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1. p	Assumptie
2. q	Assumptie
3. p	Herh., 1
4. $q \rightarrow p$	$\rightarrow$, 2, 3
5. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow$, 1, 4

De regels tot dusver vormen een systeem dat wel *minimale logica* wordt genoemd. Toch hebben we de volgende regels nodig om een aantal tautologieën, zoals bijvoorbeeld de *wet van de uitgesloten derde* en de *ex falso sequitur quodlibet*-regel, af te kunnen leiden in ons systeem.¹⁰

De **EFSQ**-regel zegt dat we uit een contradictie iedere formule af mogen leiden (zie figuur 10). De geldigheid van de regel is misschien niet onmiddellijk in te zien. Het volgende helpt daar wellicht bij. Als het mogelijk is in een systeem om een contradictie af te leiden zeg je dus eigenlijk dat er iets heel gek, iets absurds aan de hand is, bijvoorbeeld $x < 4$ en $x \not< 4$. Maar als dat zo kan zijn dan kan alles wel het geval zijn. De **EFSQ**-regel codificeert eigenlijk deze gedachte.

Ten slotte, voegen we de $\neg\neg$ -regel toe, zie Figuur 11. Als het niet zo is dat we niet naar het strand gaan, dan gaan we dus wel naar het strand! Zonder deze regel is $\neg p \vee p$ niet afleidbaar.¹¹

¹⁰Dit is een punt dat in paragraaf 3 verder aan de orde zal komen.

¹¹Dit is een afleidingsregel die niet door iedereen wordt aanvaard. Dit is in het bijzonder in intuïtionistische logica's is niet geldig. Het gevolg is dan ook dat in het intuïtionisme de wet van de uitgesloten derde niet afleidbaar is: $\not\vdash p \vee \neg p$.

	$\vdots$	
$n - 1.$	$\perp$	
$n.$	φ	EFSQ, $n - 1$

Figuur 10: De EFSQ-regel.

	$\vdots$	
$m.$	$\neg\neg\varphi$	
	$\vdots$	
$n.$	φ	$\neg\neg, m$

Figuur 11: De $\neg\neg$ -regel.

Voorbeeld 2.6. *We laten zien dat $\vdash p \vee \neg p$.*

1.	$\neg(p \vee q)$	Assumption
2.	p	Assumption
3.	$p \vee q$	$I_{\vee}, 2$
4.	$\perp$	$G_{\neg}, 1, 3$
5.	$\neg p$	$I_{\neg}, 1, 4$
6.	$p \vee \neg p$	$I_{\vee}, 5$
7.	$\perp$	$G_{\neg}, 1, 6$
8.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$I_{\neg}, 1, 7$
9.	$p \vee \neg p$	$\neg\neg, 8$

Oefening 5. Geen afleidingen én waarheidstafels die aantonen dat

$$\begin{aligned} &\vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q) \\ &p \vee q, \neg p \vdash q \\ &p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee r \\ &\neg(p \wedge q) \vdash p \rightarrow \neg q \\ &\neg(p \wedge r), p \wedge q, q \rightarrow (s \vee r) \vdash s \end{aligned}$$

3 Correctheid en volledigheid

We hebben nu twee zeer verschillende noties van geldigheid bestudeerd en een vraag die zich dan aandient is hoe deze noties zich tot elkaar verhouden. Het bijzondere is dat alhoewel deze noties zeer verschillend zijn ze toch van dezelfde redeneringen zeggen dat ze geldig zijn (of niet). Deze bewering valt uiteen in twee stellingen.

Stelling 3.1 (Correctheidsstelling propositielogica). *Als $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ formules zijn van de propositielogica, dan*

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi \implies \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$$

Deze stelling zegt dat als er een afleiding bestaat van ψ uit formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dan volgt dit ook semantisch, dwz. een waarheidstafel zal hetzelfde uitwijzen. Een andere manier hoe je dit zou kunnen zeggen is dat ons afleidingssysteem zo in elkaar zit dat je geen onwaarheden af kan leiden. Dit bedoelen we als we zeggen dat een bewijssysteem *correct* is en is misschien wel de minste eis die je kan stellen aan een logisch systeem. Het zou vreemd zijn als je een formele notie van bewijs zou hanteren die je in staat zou stellen onwaarheden af te leiden!

Stelling 3.2 (Volledigheidsstelling propositielogica). *Als $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ formules zijn van de propositielogica, dan*

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \implies \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

De volledighedsstelling is de andere richting op: als een formule ψ logisch volgt uit premissen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dan garandeert deze stelling dat er een afleiding van ψ is te maken uit die premissen, ook al vertelt de stelling er niet

bij hoe die afleiding er uitziet. Stel je moet met een waarheidstafel een redenering toetsen op geldigheid. Hier beheers je inmiddels een methode voor. Misschien moet je even de mouwen op stropen, maar met behulp van een waarheidstafel kan je zonder al te veel na te hoeven denken tot een oplossing komen. Zoals in de oefeningen wellicht is gebleken is het bestaan van een afleiding helemaal niet evident als je je bedenkt hoeveel mogelijkheden je hebt om formules af te leiden met ons afleidingssysteem!

Stellingen 3.1 en 3.2 zijn belangrijke resultaten in de logica maar we hebben ze hier alleen maar genoemd. We zouden ze natuurlijk eigenlijk nog moeten bewijzen! Helaas, is daar hier geen ruimte voor. Wel kunnen we naar aanleiding hiervan nog een laatste opmerking maken. De afleidingen die we nu hebben bestudeerd en gemaakt kan je zien als bewijzen *in* het logisch systeem dat we hebben ontwikkeld. Een bewijs van een van de twee voornoemde stellingen zou een bewijs zijn *over* het logisch systeem zijn. Dit soort bewijzen zijn het onderwerp van een onderdeel van de logica dat we *metalogica* noemen. In dit gebied van de logica worden de specifieke eigenschappen van logische systemen bestudeerd. Het is bijvoorbeeld niet zo dat ieder logisch systeem de eigenschap heeft die wordt uitgedrukt door stelling 3.2. Ook bestaan er nog veel meer eigenschappen die je aan een logisch systeem kan toeschrijven. Uitzoeken welke eigenschappen een bepaald systeem heeft is waar een logicus zich voornamelijk bezighoudt.

Referenties

Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210, 1935. [Geciteerd op pagina 5.]

Johan van Benthem, Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, and Jan Jaspars. *Logic in Action*. 2016. <http://www.logicinaction.org/docs/lia.pdf>. [Geciteerd op pagina's 1, 4, and 5.]

Jan van Eijck and Albert Visser. *Inzien en Bewijzen*, volume 2 of *Exact in context*. Amsterdam University Press, 2005. <http://homepages.cwi.nl/~jve/qed/>. [Geciteerd op pagina 2.]